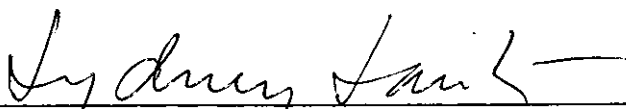


CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES EM CHAPAS INFINITAS
TRACIONADAS

ALEXANDRE DOMINGUES CAMPOS


TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO
DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTEN
ÇÃO DE GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

APROVADA POR:


SYDNEY MARTINS G. DOS SANTOS


PAULO ALCANTARA GOMES


DIRCEU DE ALENCAR VELLOSO


JAYME MASON

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JULHO DE 1983

CAMPOS, ALEXANDRE DOMINGUES

Concentração de tensões em chapas infinitas tracionadas.
Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, 1983.

viii, 227 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Ci
vil, 1983).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Escola
de Engenharia.

1. Concentração de Tensões

I. COOPE/UFRJ

II. Título (Série)

À MINHA MÃE

A G R A D E C I M E N T O S



Ao Professor Sydney M. G. dos Santos pela sugestão do Tema e ensinamentos como Orientador da Tese.

Ao Professor Danilo Sili Borges por eu ter conseguido concluir este trabalho.

Aos Professores do Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Brasília pelo incentivo.

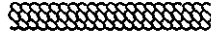
Aos Professores Marcello da Cunha Moraes e Luiz Mário Marques Couto pelo apoio e compreensão.

Ao Geraldo Estrela pelo trabalho de datilografia.

À minha Esposa pela paciência.

Ao Sérgio e Pedro pelas injeções de ânimo.

R E S U M O



Este trabalho apresenta um desenvolvimento teórico sobre o problema de concentração de tensões em chapas infinitas furadas, utilizando funções de variáveis complexas. São feitas aplicações de tal formulação a diferentes problemas, e, em seguida, estes mesmos são resolvidos com o auxílio do método dos elementos finitos. Pela comparação de resultados chegou-se a diversas conclusões a respeito da precisão do método numérico além de outras observações de interesse.

Acompanham, ao final, gráficos mostrando o fator de concentração de tensões para os problemas estudados.

S U M M A R Y



This work presents a theoretical development about stress concentration in infinite plates with holes, using complex variables functions.

Applications of this technique to different problems are presented as well as the solution of the same problems using Finite Element Method. Through results comparison, conclusions are established and some interesting comments are made.

Finally, graphics showing stress concentration factor to each studied problem are also presented.

I N D I C E

	<u>PÁGINA</u>
CAPÍTULO I - FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA -----	2
I.1 - Os Números Complexos -----	2
I.1.1 - Propriedades dos Números Com plexos -----	2
I.1.2 - Número Complexo Conjugado --	3
I.1.3 - Representação Polar -----	4
I.2 - Funções de uma Variável Complexa ---	5
I.3 - Operadores Complexos -----	10
I.4 - Transformação Conforme -----	12
I.5 - Integração Complexa - Integral de Contorno -----	15
I.5.1 - Integral de Contorno -----	15
I.5.2 - Teorema de Cauchy -----	17
I.5.3 - Equação Integral de Cauchy -	18
I.5.4 - A Integral de Cauchy - Méto do de Resíduos -----	20
CAPÍTULO II - APLICAÇÃO À ELASTICIDADE PLANA -----	25
II.1 - Equações Gerais da Teoria da Elasti cidade -----	25
II.1.1 - Equações de Equilíbrio ---	25

II.1.2 - Equações de Compatibilida <u>de</u>	26
II.1.3 - Relação Tensão x Deforma <u>ção</u>	27
II.1.4 - Condições de Contorno ---	28
II.2 - Estado Plano de Tensões -----	29
II.3 - Função de Tensão -----	31
II.4 - Função de Tensão Complexa -----	32
II.5 - Tensões e Deslocamentos - Poten <u>ciais</u> Complexos -----	37
II.5.1 - Deslocamentos -----	37
II.5.1.1 - Usando a Função de Tensão -----	37
II.5.1.2 - Usando os Poten <u>ciais</u> Complexos	40
II.5.2 - Tensões -----	41
II.6 - Condições de Contorno -----	43
II.6.1 - Força e Momento Resultante no Contorno -----	44
II.6.2 - Condições de Contorno para Forças Prescritas -----	46
II.6.3 - Rotação dos Eixos de Refe <u>rência</u> -----	47
II.7 - Aplicação à Transformação Conforme	48
II.8 - Determinação dos Potenciais Comple <u>xos</u> -----	53

CAPÍTULO III - APLICAÇÃO A CHAPAS INFINITAS COM FUROS ----	58
III.1 - Chapa Infinita com Furo Circular	
Tracionada -----	59
III.2 - Chapa Infinita com Furo Quadrado	
Tracionada -----	70
III.3 - Chapa Infinita com Furo Elíptico	
Tracionada -----	74
III.4 - Chapa Infinita com Furo Triangular	
Tracionada -----	76
CAPÍTULO IV - APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS -	81
IV.1 - O Elemento Utilizado -----	81
IV.2 - Escolha da Malha -----	82
IV.3 - Confiabilidade dos Resultados -----	83
IV.4 - Problemas Resolvidos -----	84
CAPÍTULO V - COMPARAÇÃO DE RESULTADOS -----	192
V.1 - Curvas de Convergência -----	192
V.1.1 - Furo Circular -----	192
V.1.2 - Furo Elíptico -----	202
V.2 - Confrontação Solução Numérica/Analítica -----	216
V.2.1 - Furo Circular -----	216
V.2.2 - Furo Elíptico -----	217
V.3 - Conclusões -----	219

SIMBOLOGIA

MAÍSCULAS ROMANAS

E	Módulo de elasticidade
G	Módulo de elasticidade transversal
S	Região no plano z
T	Tensão aplicada no infinito
X	Força externa na direção x
Y	Força externa na direção y
Z	Força externa na direção z

MINÚSCULAS ROMANAS

a	Semi eixo menor da elipse
a_n	Coeficiente de série de Taylor
b	Semi eixo maior da elipse
b_n	Coeficiente de série de Laurent
c	Valor de referência para malha de elementos finitos
l	Semi largura de faixa
p	Parte real de função complexa analítica
q	Parte imaginária de função complexa analítica
r	Raio de furo circular
u	Deslocamento na direção x
v	Deslocamento na direção y
w	Deslocamento na direção z
x	Eixo de referência no plano z
y	Eixo de referência no plano z

z	Número complexo
\bar{z}	Número complexo conjugado

LETRAS GREGAS

α	Parte real de função de variável complexa. Ângulo
β	Parte imaginária de função de variável complexa
γ	Contorno fechado no plano z
ξ	Eixo de referência no plano z
η	Eixo de referência no plano z
ζ	Número complexo transformado
$\omega(\zeta)$	Função que relaciona os planos z e ζ
σ	Valor sobre o contorno γ . Tensão normal
τ	Tensão cisalhante
ε	Deformação específica
ν	Coeficiente de Poisson
$\bar{\rho}$	Tensão aplicada a contorno
ψ	Potencial complexo
Ψ	Potencial complexo
χ	Potencial complexo
ϕ	Função de tensão real
θ	Ângulo
Σ	Região no plano z

CAPÍTULO I - FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA

CAPÍTULO I

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA

Este capítulo não tem por objetivo cobrir toda a teoria de funções de uma variável complexa e nem nela aprofundar-se demais, existindo apenas para que se tenha algumas noções básicas de um dos instrumentos deste trabalho, fornecendo assim elementos suficientes para o entendimento do estudo aqui desenvolvido.

Será suprimida grande parte das demonstrações, podendo estas, entretanto, serem facilmente encontradas na literatura corrente, em textos como o de CHURCHILL (1960).

I.1 - Os Números Complexos

Originaram-se da dificuldade de resolução de certas equações algébricas como $x^2 = -1$. Devido a inexistência de um número real cujo quadrado seja -1, introduziu-se um novo número definido por $i^2 = -1$ ou $i = \sqrt{-1}$, chamado unidade imaginária. Combinados à unidade imaginária dois números reais a e b , forma-se um número complexo $z = a + bi$, onde a é sua parte real e b a imaginária, definidos de tal forma que permaneçam válidas as operações instituídas para números reais.

I.1.1 - Propriedades dos Números Complexos

Seguem-se propriedades válidas para números complexos.

xos. A demonstraco de cada uma pode ser encontrada em CHURCHILL (1960) ou ÁVILA (1974).

$$a) \text{ Se } a + ib = c + id \Rightarrow a = c \text{ e } b = d$$

$$b) (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

$$c) (a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

$$d) c(a + ib) = ac + ibc \text{ e } i(a + ib) = -b + ia$$

$$e) z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad (I.1)$$

$$f) (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

$$g) \alpha(z_1 + z_2) = \alpha z_1 + \alpha z_2, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$h) z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

$$i) z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2)z_3 \text{ ou } \alpha(z_1 z_2) = (\alpha z_1)z_2, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$j) |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

I.1.2 - Número Complexo Conjugado

Define-se o conjugado de um número complexo

$z = x + iy$, como:

$$\bar{z} = x - iy \quad (I.2)$$

e seu oposto como:

$$-z = -x -iy$$

Pode-se então enumerar algumas propriedades do número complexo conjugado:

$$|z| = |\bar{z}| = |-z| \quad ; \quad z \cdot \bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$$

$$\text{Re } z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad , \quad \text{onde Re} = \text{parte real de} \quad (I.3)$$

$$\text{Im } z = \frac{z - \bar{z}}{2} \quad , \quad \text{onde Im} = \text{parte imaginária de}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad ; \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

Define-se, a partir das propriedades acima, subtração (por seu oposto) e divisão (por seu conjugado) de números com plexos:

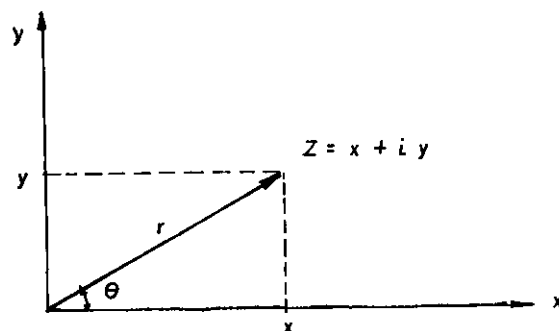
$$z_3 = z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) \quad (I.4)$$

$$z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

I.1.3 - Representação Polar

Todo número complexo, como até aqui definido, pode ser interpretado como um ponto no plano, chamado plano comple xo, onde o eixo x representa sua parte real e o eixo y sua

parte imaginária.



REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UM NÚMERO COMPLEXO

Fig. I.1

Sendo assim, vê-se facilmente (Fig. I.1) que o número complexo poderia ser representado em coordenadas polares ao invés das retangulares x e y :

$$z = x + iy = r (\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta} \quad (I.5)$$

onde:

θ é chamado ARGUMENTO de z

r é o módulo de z ($r = |z|$)

I.2 - Funções de Uma Variável Complexa

São funções definidas no campo complexo e cujas variáveis são, em geral, complexas.

Por exemplo:

$$f(z) = z^2 ; f(z) = \sin z ; f(z) = \frac{1}{z}$$

A derivada de tais funções é definida por:

$$\frac{d f(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

que deve ter valor único, independente da direção na qual o deslocamento Δz seja dado. Facilmente se verifica que se $z = x + iy$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = i \quad (I.6)$$

As funções $f(z)$, deriváveis em todos os pontos de uma certa região R recebem o nome de funções ANALÍTICAS nesta região e, exatamente por serem deriváveis pode-se demonstrar que são CONTÍNUAS nesta mesma região. A soma de duas funções analíticas, bem como seu produto, é uma função também analítica sendo verdadeira a recíproca. O quociente de duas funções analíticas é analítico nos pontos onde o denominador não se anula.

Uma função analítica possui integral indefinida I e esta será aquela função cuja derivada em relação a z é $f(z)$

$$I = \int f(z) dz$$

Qualquer função de uma variável complexa pode ser expressa como a soma de duas funções reais, na seguinte forma:

$$f(z) = \alpha(x,y) + i\beta(x,y) \quad (I.7)$$

Seja, por exemplo, a função:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} \cdot \frac{x - iy}{x - iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \\ &= \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{y}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

onde:

$$\alpha(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad - \text{Parte real}$$

$$\beta(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad - \text{Parte imaginária}$$

Como o número complexo z depende de x e y , qualquer função analítica $f(z)$ pode ser considerada como uma função de x e y , possuindo derivadas parciais:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}, \text{ de (I.6) vê-se que}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(z) = f'(z) \quad (I.8)$$

Da mesma forma:

$$\frac{\partial}{\partial y} f(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ novamente de (I.6), vem:}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(z) = i f'(z) \quad (I.9)$$

Escrevendo $f(z)$ na forma (I.7) com $\alpha(x,y) = \alpha$ e $\beta(x,y) = \beta$

$$f(z) = \alpha + i\beta$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(z) = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + i \frac{\partial \beta}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial y} f(z) = \frac{\partial \alpha}{\partial y} + i \frac{\partial \beta}{\partial y}$$

que comparados a (I.8) e (I.9):

$$f'(z) = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + i \frac{\partial \beta}{\partial y} \quad \text{e} \quad i f'(z) = \frac{\partial \alpha}{\partial y} + i \frac{\partial \beta}{\partial x}$$

eliminando $f'(z)$, vem:

$$i \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + i \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) = \frac{\partial \alpha}{\partial y} + i \frac{\partial \beta}{\partial x}, \text{ lembrando (I.1d)}$$

$$- \frac{\partial \beta}{\partial x} + i \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial y} + i \frac{\partial \beta}{\partial y}, \text{ ou, de (I.1a)}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = - \frac{\partial \beta}{\partial x} \quad (I.10)$$

As duas equações acima chamam-se equações de CAUCHY-RIEMANN e serão sempre atendidas se α e β forem analíticos.

Por outro lado, é condição necessária e suficiente

atender às equações de CAUCHY-RIEMANN para que $f(z)$ seja analítica nesta região, desde que α e β tenham primeiras derivadas parciais em x e y contínuas em uma determinada região R .

Em (I.10), derivando a primeira em relação a x , a segunda em relação a y e somando os resultados:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla^2 \alpha = 0 \quad (\text{I.11})$$

onde a equação acima é chamada equação de Laplace e o operador ∇ chama-se LAPLACIANO, definido por:

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

Qualquer função solução da equação de Laplace é chamada função harmônica.

Analogamente à eliminação de β em (I.10), pode-se eliminar α e obter

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla^2 \beta = 0$$

concluindo-se que as partes real e imaginária de uma função analítica $f(z)$ são soluções da equação de Laplace e chamam-se, por isso, funções harmônicas conjugadas. Dada portanto uma função harmônica qualquer pode-se determinar sua harmônica conjugada a partir de (I.10), a menos de uma constante.

As conclusões do parágrafo acima são de extrema importância na aplicação das funções de variáveis complexas à teoria da elasticidade.

1.3 - Operadores Complexos

Alguns operadores serão utilizados oportunamente e para que se possa citá-los sem maiores detalhes quando se fizer necessário, serão aqui desenvolvidos.

Sejam:

$$z = x + iy$$

$$\bar{z} = x - iy$$

Resolvendo o sistema de equações acima para x e y :

$$x = \frac{1}{2} (z + \bar{z})$$

(1.12)

$$y = \frac{1}{2i} (z - \bar{z})$$

Facilmente pode-se chegar a:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 ; \frac{\partial z}{\partial y} = i ; \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = 1 ; \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = -i$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2} ; \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \quad e \quad (I.13)$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2} ; \quad \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2i} = \frac{i}{2}$$

Se z é função de x e y :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{i}{2}$$

resultando em:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (I.14)$$

Analogamente, para \bar{z} :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (I.15)$$

Da mesma forma, da equação (I.12) pode-se dizer que x e y são funções de z e \bar{z} , logo:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad (I.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \quad (I.17)$$

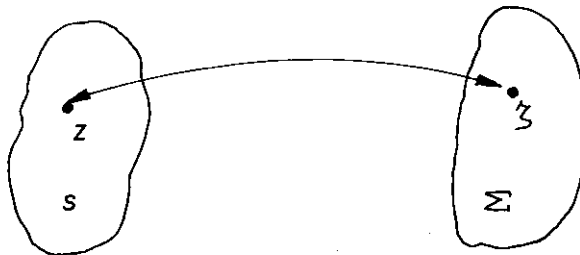
I.4 - Transformação Conforme

Será utilizada em capítulos posteriores quando da resolução de problemas de contorno. Foram incluídos, este item e o seguinte, de integração complexa, para que não se perca tempo com explicações introdutórias nas aplicações à elasticidade plana, do próximo capítulo.

Como nos itens anteriores, trocou-se o rigor matemático por um desenvolvimento mais objetivo e claro, podendo este, entretanto, ser encontrado nas referências já citadas.

Sejam $z = x + iy$ e $\zeta = \xi + i\eta$ duas variáveis complexas, cada uma das quais definindo um plano de mesmo nome. Seja S uma região de z assim como Σ é uma região de ζ . Pode-se definir uma função, analítica em Σ , que transforme pontos definidos em S para outros definidos em Σ , na forma:

$$z = \omega(\zeta) \quad (I.18)$$



TRANSFORMAÇÃO CONFORME

Fig. I.2

sendo tal transformação reversível e de forma que a cada ponto z corresponda um, e apenas um, ponto ζ em Σ (transformação um a um). A transformação é dita conforme porque se dois elementos

lineares em Σ formam entre si um ângulo α , seus correspondentes em S formarão entre si este mesmo ângulo α .

As regiões S e Σ podem ser finitas ou infinitas, não impedindo a realização da transformação. Se, por exemplo, Σ é finita e S infinita, a função $\omega(\zeta)$ deve transformar o infinito em algum ponto de Σ (como também algum ponto de Σ deve corresponder ao infinito em S). Vê-se então que $\omega(\zeta)$ deve ter um polo simples neste ponto, ou seja, assumindo por simplicidade que $z = \infty$ corresponda a $\zeta = 0$, vem:

$$\omega(\zeta) = \frac{c}{\zeta} + \text{função analítica}; \quad c = \text{cte real ou complexa}$$

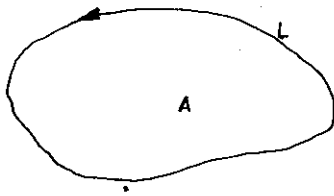
Se entretanto S e Σ são ambas infinitas os pontos infinitos se correspondem e $\omega(\zeta)$ tem a forma:

$$\omega(\zeta) = c\zeta + \text{função analítica}; \quad c = \text{cte real ou complexa}$$

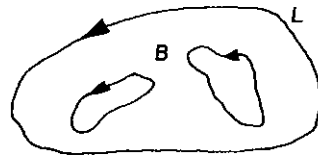
Para que a transformação seja biunívoca e reversível é necessário que não ocorram singularidades para $\omega(\zeta)$ em Σ (ex_ceto no caso do primeiro exemplo citado, onde o ponto de Σ correspondente ao infinito em S é singular) e que $\omega'(\zeta)$ não seja zero nesta mesma região.

Considerações a respeito da possibilidade de se encontrar $\omega(\zeta)$ para quaisquer duas regiões arbitrárias não serão tecidas aqui, restringindo-se este ítem a tratar de regiões sim

plesmente conexas, onde existe sempre esta possibilidade.



(a)



(b)

Régião Simplesmente Conexas

Régião Multiplamente Conexas

CONEXIDADE DE REGIÕES

Fig. I.3

A transformação fornecerá um par de equações:

$$x = \phi(\xi, \eta)$$

$$y = \psi(\xi, \eta)$$

a partir das quais se consegue estudar a forma geométrica das áreas correspondentes. O contorno, em z , será transformado através de (I.18) em uma função de ζ e as funções complexas neste plano devem atender a novas condições.

Por simplicidade, suponha-se ser Σ um círculo unitário centrado na origem, cujo contorno será chamado γ de tal forma que, sobre γ , $|\zeta| = 1$. A função $\omega(\zeta)$ é analítica, e portanto contínua, sobre o contorno γ e tais valores serão chamados $\omega(\sigma)$, onde $\sigma = e^{i\nu}$ é um ponto de tal contorno⁽¹⁾. Desta forma, consegue-se passar de um contorno qualquer, desde que simples-

(1) Deve-se lembrar que $e^{i\nu}$ é a equação de uma circunferência de raio unitário, o que pode ser facilmente visto da fórmula de Euler (Form. I.5), com $\theta = \nu$.

mente conexo, do plano z para um contorno circular, no plano ζ . A importância de tal método reside no fato de que o novo problema pode ser, em alguns casos, mais facilmente resolvido que o primitivo.

I.5 - Integração Complexa - Integral de Contorno

Seja t um ponto de uma curva, de extremidades a e b . Pode-se definir curva fechada como todo arco cujas extremidades $z(a)$ e $z(b)$ coincidam. Curva fechada simples é o arco que atende à exigência acima e ainda, se $z(t_1) = z(t_2)$, obrigatoriamente $t_1 = t_2$.

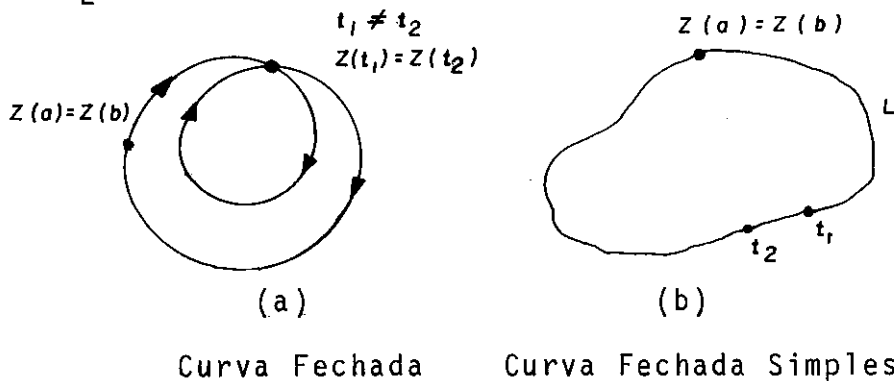


Fig. I.4

Toda curva fechada simples é simplesmente conexa (vide Fig.(I.2)) e divide o plano em duas regiões, tendo L como fronteira comum.

I.5.1 - Integral de Contorno

Define-se integral sobre um contorno simples L , fechado ou não, como:

$$\int_L f(z) dz \quad (I.19)$$

onde $f(z) = u + iv$ é uma função analítica em L .

Representando o contorno por $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, de fine-se (I.19) como:

$$\int_L f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \quad (I.20)$$

A linearidade da integral acima é facilmente demonstrável e é expressa por:

$$\int_L [f_1(z) + f_2(z)] dz = \int_L f_1(z) dz + \int_L f_2(z) dz$$

$$e \quad (I.21)$$

$$\int_L cf(z) dz = c \int_L f(z) dz$$

Além disso, se o contorno L é formado por um número finito de contornos:

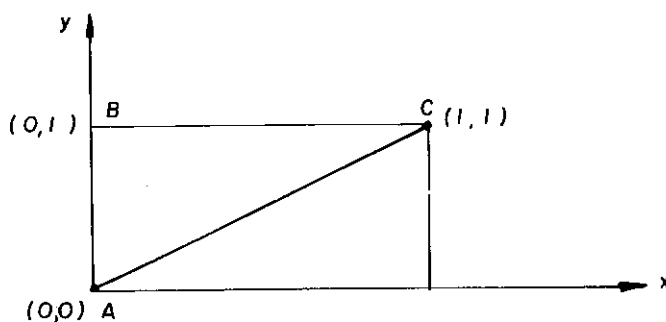
$$\begin{aligned} \int_{c_1+c_2+\dots+c_n} f(z) dz &= \int_{c_1} f(z) dz + \int_{c_2} f(z) dz + \dots + \\ &+ \int_{c_n} f(z) dz \end{aligned} \quad (I.22)$$

e ainda pode-se dizer que:

$$\int_L f(z) dz = - \int_L f(z) dz$$

I.5.2 - Teorema de Cauchy

Avaliando-se a integral de $f(z) = \bar{z}$ para os dois contornos, ABC e AC, da Fig. I.5, obtêm-se resultados diferentes para cada um deles, verificando-se ser a integral dependente do caminho de integração. Por outro lado, ao se fazer o mesmo para $f(z) = z$, obter-se-ã o mesmo resultado para ambos os contornos e a integral (I.19) não dependerã do caminho de integração, mas sômente de seus pontos inicial e final e, em particular, se o contorno for fechado e seus pontos de início e fim coincidem, a integral se anularã, qualquer que seja o contorno sobre o qual a integração foi realizada.



CAMINHOS DE INTEGRAÇÃO

Fig. I.5

O acima exposto é válido não sô para a função $f(z) = z$ como também o é para qualquer função analítica em L. Daí, o teorema de Cauchy:

TEOREMA 1

Seja f uma função analítica numa região simplesmente conexa R . Então:

$$\oint_L f(z) dz = 0 \quad (I.24)$$

para todo contorno fechado contido em R .

Pode-se ainda concluir que:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0), \text{ onde } F'(z) = \quad (I.25)$$

$$= f(z)$$

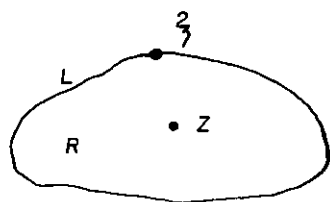
I.5.3 - Equação Integral de Cauchy

Este item é de suma importância no estudo de funções analíticas. Pode-se obter o valor de uma função analítica qualquer $f(z)$ definida numa região simplesmente conexa R a partir de valores conhecidos em seu contorno.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (I.26)$$

onde $z \in R$, $\xi \in L$ e L é qualquer contorno fechado simples de R

que envolva z uma vez e cujo interior está todo contido em R .



INTEGRAL DE CAUCHY - CONTORNO FECHADO SIMPLES

Fig. I.6

Vale a pena tecer alguns comentários sobre a fórmula (I.26), visando principalmente sua aplicação posterior.

Se a função

$$g(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi - z}$$

for analítica em toda a região R , o teorema de Cauchy nos leva a concluir que a integral (I.26) se anulará. Por outro lado, se $g(\xi)$ não for analítica, e não o é se $z \in R$, a mesma não será nula e deve ser calculada, como também deve ser feito se, em particular, $g(\xi)$ tiver apenas uma singularidade e esta for um polo de ordem 1 (ver item seguinte). Pode-se resumir o exposto acima da seguinte maneira:

$$\int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 2\pi i f(z), \text{ se } \frac{f(\xi)}{\xi - z} \text{ não for analítica em } R \quad (\text{I.27})$$

$$\int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0, \text{ se } \frac{f(\xi)}{\xi - z} \text{ for analítica em } R \quad (\text{I.28})$$

Vale ainda lembrar o teorema de MORERA para funções contínuas em uma região simplesmente conexa R , que é a recíproca do teorema de Cauchy:

"Se $\int_L f(z)dz = 0$ para qualquer $L \in R$,

então $f(z)$ é analítica em R ".

I.5.4 - A Integral de Cauchy - Método dos Resíduos

A integral de (I.27) não se aplicará o teorema de Cauchy se o integrando não for analítico e, sendo assim, a mesma deve ser calculada e uma forma de avalia-la é pelo método dos resíduos, exposto a seguir.

Se uma função é definida em toda uma região R , exceto em alguns pontos singulares z_0 , possuirá um desenvolvimento de LAURENT em torno de cada um deles

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad (I.29)$$

se todos os coeficientes b_n forem nulos a singularidade será removível e a expansão em séries da função em torno de z_0 terá a forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

que é a conhecida expansão de Taylor para funções analíticas, onde o valor de $f(z)$ em z_0 será dado pelo coeficiente a_0 . Por outro lado, se existe um número finito de termos da primeira série de (I.29), a expansão será:

$$f(z) = \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{b_1}{(z-z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \text{ com } b_m \neq 0 \quad (\text{I.30})$$

z_0 é chamado "polo de ordem m " da função $f(z)$ e o termo em $(z-z_0)^{-1}$ que precede a série de Taylor em (I.30) é chamado "parte singular de $f(z)$ no ponto z_0 ", e seu coeficiente b_1 chama-se "resíduo de $f(z)$ no ponto z_0 ", sendo designado por $(\text{res } f)(z_0)$.

A importância da definição está no estabelecimento do teorema dos resíduos, a partir do qual pode-se calcular a integral (I.27).

TEOREMA 2⁽¹⁾

Se $f(z)$ é analítica numa região R exceto em um número finito de singularidades isoladas z_1, \dots, z_n , então:

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k (\text{res } f)(z_j) \quad (\text{I.31})$$

(1) A demonstração do teorema pode ser encontrada em ÁVILA (1974)

onde c é um contorno fechado de R , envolvendo z_1, \dots, z_n .

Para um polo de ordem m , o resíduo pode ser calculado por:

$$(\text{res } f)(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z) \right] \quad (\text{I.32})$$

Particularmente, para um polo de ordem 1:

$$b_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[(z-z_0) f(z) \right] \quad (\text{I.32a})$$

Segue-se a aplicação do teorema acima a duas integrais, utilizadas no próximo capítulo. Será feito $z = \sigma$, $z_0 = \zeta$ e $L = \gamma$ para que a notação seja a mesma quando da aplicação:

$$\text{a) } I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sigma^n}{\sigma - \zeta} d\sigma$$

O integrando tem um polo de ordem 1 em ζ , então de (I.32a) o resíduo é ζ^n , logo, de (I.31):

$$I_1 = \zeta^n$$

$$\text{b) } I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\sigma^n (\sigma - \zeta)} d\sigma$$

A função

$$\frac{1}{\sigma^n (\sigma - \zeta)}$$

tem um polo de ordem 1 em ζ , cujo resíduo é $1/\zeta^n$ e um polo de ordem n na origem, cujo resíduo pode ser calculado a partir de (I.32) e vale $-1/\zeta^n$. Logo, de (I.31):

$$I_2 = 0$$

Encerra-se aqui este capítulo introdutório. Quaisquer considerações adicionais serão apresentadas quando necessário.

CAPÍTULO II - APLICAÇÃO À ELASTICIDADE PLANA

CAPÍTULO II

APLICAÇÃO À ELASTICIDADE PLANA

Aqui será feito um apanhado das equações gerais da teoria da elasticidade, particularizando-as ao estado plano de tensões. Por serem equações universalmente conhecidas, serão apresentados somente seus resultados finais, entretanto, todo seu desenvolvimento pode ser encontrado em livros como o de TIMOSHENKO(1980).

Ainda neste capítulo será feita a aplicação de variáveis complexas que por ser menos utilizada será aqui desenvolvida mais amplamente.

II.1 - Equações Gerais da Teoria da Elasticidade

II.1.1 - Equações de Equilíbrio

Um estudo do equilíbrio de forças em um paralelepípedo elemental levará às seguintes equações:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \quad (II.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

O equilíbrio de momentos mostra que:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (II.2)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Onde X, Y e Z são forças de massa, por unidade de volume.

II.1.2 - Equações de Compatibilidade

As relações deformação x deslocamento são dadas por:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (II.3)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

As deformações não são livres, mas sim compatíveis umas com as outras e se relacionam através de:

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2}$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y}$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial z}$$

(II.4)

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2}$$

II.1.3 - Relações Tensão x Deformação

Pôdemos expressar as deformações em termos das tensões. Tais relações constituem a lei de Hooke generalizada.

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\
 \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\
 \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}
 \end{aligned} \tag{II.5}$$

onde: ν - coeficiente de POISSON

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{Alguns autores fazem } G = \mu)$$

ou ainda, explicitando as tensões:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \lambda \phi + 2G\epsilon_x & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\
 \sigma_y &= \lambda \phi + 2G\epsilon_y & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} \\
 \sigma_z &= \lambda \phi + 2G\epsilon_z & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}
 \end{aligned} \tag{II.6}$$

$$\text{onde: } \lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$

$$\phi = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \text{invariante das deformações.}$$

II.1.4 - Condições de Contorno

Devem ser atendidas em cada caso. As condições de contorno, ou seja, as tensões nas fronteiras do corpo devem ser

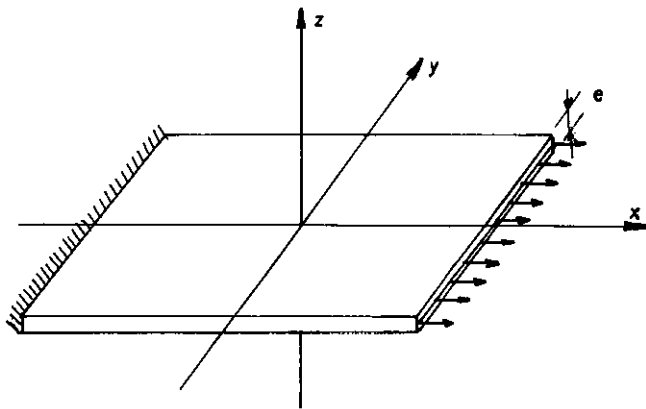
compatíveis com as cargas aplicadas bem como também o devem ser as deformações e deslocamentos, aos impedimentos impostos (Apoios).

II.2 - Estado Plano de Tensões

Pode-se definir estado plano de tensões como se segue:

(a) $\sigma_z = 0$; $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$

(b) Uma componente da tensão será a média ao longo da espessura "e" e independerã de z.



CHAPA SUBMETIDA A ESTADO PLANO DE TENSÕES

FIG. II.1

$$\sigma_x = \frac{1}{e} \int_{-e/2}^{e/2} \bar{\sigma}_x dz \quad ; \quad \sigma_y = \frac{1}{e} \int_{-e/2}^{e/2} \bar{\sigma}_y dz \quad ; \quad \tau_{xy} = \frac{1}{e} \int_{-e/2}^{e/2} \bar{\tau}_{xy} dz$$

Claro está que se a espessura "e" for muito grande, a variação de tensão nesta dimensão também o será e o estado não será plano, obrigando a uma análise tridimensional.

As equações do Ítem anterior simplificam-se pela eliminação dos termos nulos.

As 3 equações de equilíbrio reduzem-se a:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y &= 0\end{aligned}\tag{II.7}$$

ou sem o último termo de cada equação se as forças de massa forem nulas.

As 6 equações de compatibilidade ficam:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}\tag{II.8}$$

A lei de HOOKE:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \sigma_y] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu \sigma_x] & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \epsilon_z &= -\frac{\nu}{E} [\sigma_x + \sigma_y]\end{aligned}\tag{II.9}$$

com o auxílio de eq.(II.9), a eq.(II.8) pode ser escrita em termos das tensões e, após umas tantas passagens, obter-se-á uma equação conhecida por equação de LÉVY (Forças de Massa Nulas ou Constantes)

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (\text{II.10})$$

As condições de contorno no estado plano de tensões são atendidas se:

$$\bar{\rho}_x = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha \quad (\text{II.11})$$

$$\bar{\rho}_y = \tau_{xy} \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha$$

onde $\bar{\rho}_x$ e $\bar{\rho}_y$ são as tensões aplicadas (conhecidas) nas direções x e y respectivamente e α é o ângulo de inclinação do vetor normal ao corpo, no ponto do contorno em questão.

II.3 - Função de Tensão

Qualquer problema na elasticidade plana estará resolvido se as funções determinadas para as tensões atenderem às equações (II.7) e (II.10) aliadas às condições de contorno. Se for determinada uma função ϕ de forma que:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad ; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad ; \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (\text{II.12})$$

as equações de equilíbrio (II.7) ficam identicamente atendidas (para forças de massa nulas ou constantes) e a equação de compatibilidade tomará a forma

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = 0$$

(II.13)

$$\nabla^4 \phi = 0$$

sendo esta última conhecida como equação bi-harmônica e, se for atendida, o estado tensional determinado por (II.12) já será de possível ocorrência, faltando apenas ser determinado o carregamento que o gerarão.

Se o carregamento for pré-fixado, como o é neste trabalho, deve-se atender, além da equação bi-harmônica, às condições de contorno (II.11) que podem ser expressas em termos da função de tensão.

$$\bar{p}_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \cos \alpha - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \sin \alpha$$

(II.14)

$$\bar{p}_y = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \cos \alpha + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \sin \alpha$$

II.4 - Função de Tensão Complexa

A forma de se encontrar a função de tensão dada a seguir foi desenvolvida pela primeira vez por N. I. MUSKHELISHVI-

LI.

A partir deste ponto é desejável o conhecimento do que foi exposto no CAP. I deste Trabalho.

A eq. (II.13) pode ser reescrita:

$$\nabla^2 (\nabla^2 \phi) = 0, \text{ e fazendo } P = \nabla^2 \phi, \text{ vê-se:}$$

$\nabla^2 P = 0$, logo, P é uma função harmônica, possuindo portanto uma função harmônica conjugada Q , que pode ser obtida a partir das equações de CAUCHY - RIEMANN, logo $P + iQ$ é uma função analítica de z

$$f(z) = P + iQ$$

e sua integral será outra função analítica, por exemplo, $4\psi(z)$, cujas partes real e imaginária são p e q .

$$\psi(z) = p + iq = \frac{1}{4} \int f(z) dz$$

Derivando parcialmente em relação a x

$$\frac{\partial p}{\partial x} + i \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \psi(z) = \frac{\partial \psi(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \psi'(z) =$$

$$= \frac{1}{4} f(z) = \frac{1}{4} (P + iQ)$$

e igualando os termos extremos

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{P}{4}$$

Como as funções p e q são as partes real e imaginária de uma função de variável complexa devem satisfazer às equações de CAUCHY.- RIEMANN além de serem funções harmônicas, logo:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{P}{4} \quad (\text{II.15})$$

Introduzindo a função analítica

$$p_1 = \phi - xp - yq \quad (\text{II.16})$$

vê-se que:

$$\begin{aligned} \nabla^2 (\phi - xp - yq) &= \nabla^2 \phi - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial p}{\partial x} + p \right) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial p}{\partial y} \right) \right] - \\ &- \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial q}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial q}{\partial y} + q \right) \right] = \\ &= \nabla^2 \phi - \left[x \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} + x \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left[y \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial y} \right] = \\
 & = \nabla^2 \phi - x \nabla^2 p - \frac{2 \partial p}{\partial x} - y \nabla^2 q - \frac{2 \partial q}{\partial y}
 \end{aligned}$$

usando (II.15) e lembrando serem p e q harmônicos:

$$\nabla^2 (\phi - xp - yq) = \nabla^2 \phi - \frac{P}{2} - \frac{P}{2} = \nabla^2 \phi - P$$

tendo em vista que $P = \nabla^2 \phi$, a expressão acima se anula, mostrando ser harmônica a expressão (II.16), logo, qualquer função de tensão pode ser escrita na forma:

$$\phi = xp + yq + p_1 \quad (\text{II.17})$$

onde p_1 é uma função harmônica convenientemente escolhida.

Se p_1 é harmônica e analítica, atende às equações de CAUCHY - RIEMANN e através destas pode-se obter sua função harmônica conjugada q_1 e montar a função complexa:

$$\chi(z) = p_1 + i q_1$$

Pode-se escrever a expressão:

$$\bar{z} \cdot \psi(z) + \chi(z) = (x - iy)(p + iq) + (p_1 + iq_1)$$

$$= xp + ixq - iyp + yq + p_1 + iq_1$$

separando as partes real e imaginária

$$\bar{z} \cdot \psi(z) + \chi(z) = (x_p + y_q + p_1) + i (x_q - y_p + q_1)$$

cuja parte real é exatamente igual a (II.17), concluindo-se que qualquer função de tensão pode ser escrita como:

$$\phi = \text{Re} [\bar{z}\psi(z) + \chi(z)] \quad (\text{II.18})$$

onde: - $\text{Re} [\quad]$ significa "parte real de"

- $\psi(z)$ e $\chi(z)$ são duas funções de variável com plexa conhecidas como POTENCIAIS COMPLEXOS.

Considerando ser (II.18) a mesma equação (II.17) e que esta última produz funções que são soluções da equação bi-harmônica (II.13), a primeira também produzirá soluções da bi-harmônica quaisquer que sejam os potenciais $\psi(z)$ e $\chi(z)$.

A questão agora é determinar os dois potenciais com plexos adequados a cada problema específico, de forma a serem atendidas as condições de contorno, já que as equações de equi_líbrio e compatibilidade estão satisfeitas.

II.5 - Tensões e Deslocamentos - Potenciais Complexos

II.5.1 - Deslocamentos

II.5.1.1 - Usando a Função de Tensão

As equações (II.9) podem ser reescritas, substituindo as deformações específicas pelas relações dadas nas equações (II.3):

$$E \frac{\partial u}{\partial x} = \sigma_x - \nu \sigma_y \quad ; \quad E \frac{\partial v}{\partial y} = \sigma_y - \nu \sigma_x \quad ; \quad (II.19)$$

$$G \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \tau_{xy}$$

introduzindo, nas equações acima, a função de tensão e lembrando que $P = \nabla^2 \phi$

$$\begin{aligned} E \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = P - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ &= - (1 + \nu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + P \end{aligned}$$

$$E \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = P - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

$$= - (1 + \nu) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + p$$

trazendo para P os valores dados por (II.15) e dividindo as expressões por $(1 + \nu)$

$$2G \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{4}{1 + \nu} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$2G \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{4}{1 + \nu} \frac{\partial q}{\partial y}$$

integrando vem:

$$2Gu = - \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{4}{1 + \nu} p + f(y) \quad (II.20)$$

$$2Gv = - \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{4}{1 + \nu} q + g(x)$$

onde $f(y)$ e $g(x)$ são funções arbitrárias. Derivando (II.20) de forma a substituí-las na terceira equação (II.19) encontra-se, após a substituição:

$$- \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + \frac{2}{1 + \nu} \left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{df(y)}{dy} + \frac{1}{2} \frac{dg(x)}{dx} = \tau_{xy}$$

o primeiro termo, como visto em (II.12), já é τ_{xy} logo, para que a igualdade se realize, o restante deve se anular:

$$\frac{2}{1 + \nu} \left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \frac{df(y)}{dy} + \frac{1}{2} \frac{dg(x)}{dx} = 0$$

A expressão entre parenteses anula-se pois p e q são funções harmônicas conjugadas, atendendo pois à eq. (I.10); Resta então:

$$\frac{df(y)}{dy} + \frac{dg(x)}{dx} = 0$$

Ora, a soma de duas funções cada qual de uma variável, sendo a variável da primeira independente da variável da segunda só se anulará se

$$\frac{df(y)}{dy} = A \quad \text{e} \quad \frac{dg(x)}{dx} = -A \quad , \quad A = \text{cte}$$

concluindo-se que as funções $f(y)$ e $g(x)$ nas equações (II.20) correspondem a deslocamentos de corpo rígido, que podem ser suprimidos, restando

$$2Gu = - \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{4}{1 + \nu} p \tag{II.21}$$

$$2Gv = - \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{4}{1 + \nu} q$$

II.5.1.2 - Usando os Potenciais Complexos

Qualquer função complexa $f(z)$ pode ser colocada na forma $\alpha + i\beta$ e terá uma conjugada $\overline{f(z)}$, obtida pela substituição de i por $-i$:

$$\text{se } f(z) = \alpha + i\beta \quad , \quad \overline{f(z)} = \alpha - i\beta$$

Segundo a definição acima, a soma

$$f(z) + \overline{f(z)} = \alpha + i\beta + \alpha - i\beta = 2 \operatorname{Re} [f(z)]$$

Desta forma, somando a expressão entre colchetes em (II.18) sua conjugada, será obtido o dobro de sua parte real, que é igual a ϕ :

$$2\phi = \overline{z} \psi(z) + \chi(z) + z \overline{\psi(z)} + \overline{\chi(z)} \quad (\text{II.22})$$

derivando-a parcialmente em relação a x , depois em relação a y e somando ao primeiro resultado i vezes o segundo:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} = \psi(z) + z \overline{\psi'(z)} + \overline{\chi'(z)} \quad (\text{II.22a})$$

neste ponto, procurando concordar com a notação dada por MUSKHELISHVILI (1975) far-se-á:

$$\Psi(z) = \frac{d\chi}{dz}$$

logo, a expressão (II.22a) pode ser escrita:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} = \psi(z) + z \overline{\psi'(z)} + \overline{\Psi(z)} \quad (\text{II.23})$$

Combinando as equações (II.21) da mesma forma obtem-se:

$$2G(u + iv) = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{4}{1 + \nu} (p + iq)$$

Introduzindo (II.23) e lembrando que $\psi(z) = p + iq$, vem:

$$2G(u + iv) = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \psi(z) - z \overline{\psi'(z)} - \overline{\Psi(z)} \quad (\text{II.24})$$

O termo à direita pode ser separado em parte real, obtendo-se u , e parte imaginária, obtendo-se v .

II.5.2 - Tensões

Pode-se calculá-las diretamente, por derivação da equação (II.22), lembrando (II.12). Prefere-se porém obtê-las de outro modo.

Derivando (II.23) em relação a x , vem:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \psi(z)}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} \overline{\psi'(z)} + z \frac{\partial \overline{\psi'(z)}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\Psi(z)}}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x}$$

lembrando o item (I.3) obtem-se:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \psi'(z) + \overline{\psi'(z)} + z \overline{\psi''(z)} + \overline{\Psi'(z)} \quad (\text{II.25})$$

Derivando (II.23) em relação a y e multiplicando por i , vem:

$$i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\psi'(z) + z \overline{\psi''(z)} - \overline{\psi'(z)} + \overline{\Psi'(z)} \quad (\text{II.26})$$

somando e subtraindo (II.25) e (II.26), lembrando sempre (II.12):

$$\sigma_x + \sigma_y = 2 \psi'(z) + 2 \overline{\psi'(z)} \quad (\text{II.27})$$

$$\sigma_y - \sigma_x - 2i \tau_{xy} = 2 [z \overline{\psi''(z)} + \overline{\Psi'(z)}]$$

A primeira das equações (II.27) pode ser reescrita como dado abaixo. Reescrita também pode ser a segunda, trocando-se i por $-i$ em ambos os lados da igualdade:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} [\psi'(z)] = 2 (\psi'(z) + \overline{\psi'(z)}) \quad (\text{II.28})$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i \tau_{xy} = 2 [\overline{z} \psi''(z) + \Psi'(z)] \quad (\text{II.29})$$

Conhecidos os potenciais complexos pode-se calcular as tensões a partir das equações acima e as deformações, se necessário, utilizando (II.24).

O problema agora consiste apenas na determinação dos potenciais complexos e a estes falta apenas atender às condições de contorno pois, como foi visto no ítem (II.4), já ficam automaticamente atendidas as equações de equilíbrio e de compatibilidade.

Pode-se escrever as equações (II.28) e (II.29) ainda de uma outra forma. Somando-as:

$$\sigma_y + i \tau_{xy} = \bar{z} \psi''(z) - \Psi'(z) + \psi'(z) + \overline{\psi'(z)} \quad (\text{II.30})$$

Subtraindo-as:

$$\sigma_x - i \tau_{xy} = \psi'(z) + \overline{\psi'(z)} - \bar{z} \psi''(z) - \Psi'(z) \quad (\text{II.31})$$

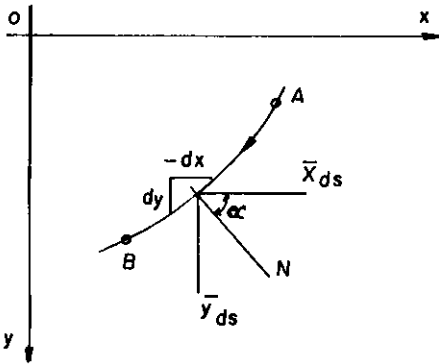
II.6 - Condições de Contorno

Usando quaisquer das equações deduzidas no ítem anterior consegue-se determinar as tensões na peça; Sobre o contorno, estas devem coincidir com o carregamento aplicado. No presente trabalho, e na maioria dos casos, tais condições são todas na forma de forças prescritas, e por isso outras condições, como deslocamentos prescritos, não serão abordados, podendo-se

encontrar o tratamento dado a estes últimos nas referências bibliográficas citadas.⁽¹⁾

II.6.1 - Força e Momento Resultante no Contorno

Seja o arco da Fig. II.2, onde \bar{X}_{ds} e \bar{Y}_{ds} são as componentes de tensão atuantes naquele ponto



$$\bar{X} = \sigma_x \cos \alpha + \tau_{xy} \sin \alpha \quad (\text{II.30})$$

$$\bar{Y} = \sigma_y \sin \alpha + \tau_{xy} \cos \alpha$$

TENSÕES NO CONTORNO

Fig. II.2

Ainda da figura vê-se que:

$$\cos \alpha = \frac{dy}{ds} \quad \text{e} \quad \sin \alpha = - \frac{dx}{ds}$$

Introduzindo os valores acima em (II.30) juntamente com as equações (II.12):

(1) Ver, por exemplo, MUSKHELISHVILI (1975) ou TIMOSHENKO (1980)

$$\bar{x} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)$$

$$\bar{y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds} = - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)$$

então, a força resultante em AB e o momento resultante em "0" serão:

$$F_x = \int_A^B \bar{x} ds = \int_A^B \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) ds = \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_A^B$$

$$F_y = \int_A^B \bar{y} ds = \int_A^B - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) ds = - \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_A^B \quad (II.31)$$

$$M = \int_A^B x \bar{y} ds - \int_A^B y \bar{x} ds = \left[\phi \right]_A^B - \left[x \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_A^B$$

Formando a combinação complexa $F_x + iF_y$ e usando (II.23):

$$F_x + iF_y = \left[\frac{\partial \phi}{\partial y} - i \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]_A^B = -i \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \phi}{\partial y} \right]_A^B \quad (II.32)$$

$$F_x + iF_y = -i \left[\psi(z) + z \overline{\psi'(z)} + \overline{\psi(z)} \right]_A^B$$

Tendo em vista que:

$$x \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial y} = \operatorname{Re} \left[z \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right]$$

e que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \phi}{\partial y} = \overline{\psi(z)} + \bar{z} \psi'(z) + \Psi(z)$$

da terceira equação (II.31), vem:

$$M = \operatorname{Re} \left[-z \bar{z} \psi'(z) + \chi(z) - z \Psi(z) \right]_A^B \quad (\text{II.33})$$

II.6.2 - Condições de Contorno para Forças Prescritas

O resultado obtido em (II.32) serve para força resultante no contorno; pode entretanto ser escrito de outra forma para consideração de cargas nele distribuídas:

$$\psi(z) + z \overline{\psi'(z)} + \overline{\Psi(z)} = f_1 + if_2 \quad (\text{II.34})$$

onde

$$f_1 + if_2 = i \int_A^B (X_n + iY_n) ds \quad (\text{II.35})$$

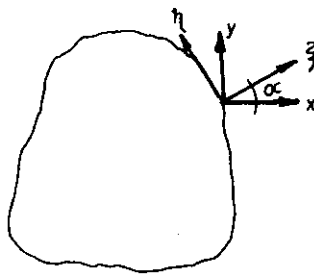
e X_n e Y_n são as componentes de cargas externas dadas em cada

ponto do contorno S (Fig. II.2). Segue-se que, conhecidas as tensões aplicadas ao contorno, determina-se f_1 e f_2 de (II.35), para serem consideradas em (II.34), cuja parte esquerda é o valor de contorno das tensões internas no ponto $z \in AB$.

$$\psi(z) + z \overline{\psi'(z)} + \overline{\Psi(z)}$$

II.6.3 - Rotação dos Eixos de Referência

Se as facetas em relação as quais se desejam as tensões fazem um ângulo α com o sistema coordenado xoy , como na figura abaixo, pode-se usar as conhecidas fórmulas de rotação de eixos da resistência dos materiais:



ROTAÇÃO DE EIXOS DE REFERÊNCIA

Fig. II.3

$$\sigma_{\xi} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\sigma_{\eta} = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$

Combinando as equações acima como indicado abaixo, obtem-se, lembrando da fórmula de EULER ($\cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}$)

$$\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta} = \sigma_x + \sigma_y$$

(II.36)

$$\sigma_{\eta} - \sigma_{\xi} + 2i \tau_{\xi\eta} = e^{2i\alpha} (\sigma_y - \sigma_x + 2i \tau_{xy})$$

II.7 - Aplicação à Transformação Conforme

No ítem (I.4) deste trabalho há um apanhado teórico, desejável que seja conhecido, sobre tal transformação, que será aplicada na resolução dos problemas a que nos propomos, uma vez que simplifica sobremaneira a consideração dos contornos aqui estudados (chapas infinitas com furos). Para tal necessita-se mudar a formulação até aqui desenvolvida, seja na determinação das tensões ou na consideração das condições de contorno, para esta nova variável ζ .

$$\text{Se } z = \omega(\zeta) = f(\xi, \eta) + ig(\xi, \eta)$$

(II.37)

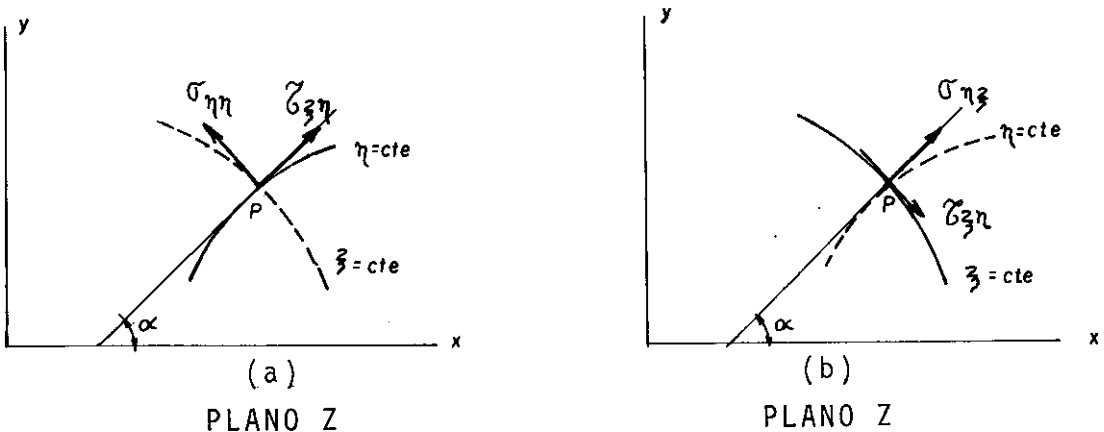
$$\psi(z) = \psi(\omega(\zeta)) = \psi(\zeta) ; \Psi(z) = \Psi(\omega(\zeta)) = \Psi(\zeta)$$

$$\psi'(z) = \frac{d\psi}{dz} = \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \psi'(\zeta) \cdot \frac{1}{\omega'(\zeta)} = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$$

$$\Psi'(z) = \frac{d\Psi}{dz} = \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \Psi'(\zeta) \cdot \frac{1}{\omega'(\zeta)} = \frac{\Psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \quad (\text{II.38})$$

$$\begin{aligned} \psi''(z) &= \frac{d\psi'(z)}{dz} = \frac{\partial \psi'(z)}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial \left(\frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right)}{\partial \zeta} \cdot \frac{1}{\omega'(\zeta)} = \\ &= \frac{1}{\omega'(\zeta)} \left[\frac{\psi''(\zeta) \cdot \omega'(\zeta) - \omega''(\zeta) \cdot \psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)^2} \right] \\ &= \frac{\Phi'}{\omega'(\zeta)} \end{aligned}$$

onde Φ' na última equação (II.38) é o termo entre colchetes. Além disso, se z é função de $\zeta = \xi + i\eta$ será também função de ξ e η podendo-se plotar no plano z curvas $\xi = \text{cte}$ e $\eta = \text{cte}$, como mostrado na figura (II.4) abaixo, onde a tangente à curva $\eta = \text{cte}$ faz um ângulo α com o eixo x .



TRANSFORMAÇÃO CONFORME...

Fig. II.4

As tangentes às citadas curvas num determinado ponto P são perpendiculares entre si⁽¹⁾ e podem ser interpretadas como coordenadas curvilíneas deste ponto, podendo um vetor sobre a curva $\xi = \text{cte}$ ter componentes normal $(\xi\xi)$ e tangencial $(\xi\eta)$, o mesmo valendo para a curva $\eta = \text{cte}$, com as respectivas componentes normal $(\eta\eta)$ e tangencial $(\xi\eta)$. As curvas

$\xi = \text{cte}$ envolvem o contorno uma vez e as curvas

$\eta = \text{cte}$ são perpendiculares a estas em cada ponto.

Levando em conta (II.36), escreve-se:

$$\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta} = \sigma_x + \sigma_y$$

$$\sigma_{\eta} - \sigma_{\xi} + 2i\tau_{\xi\eta} = e^{2i\alpha} (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy})$$

Deve-se obter agora $e^{2i\alpha}$ em termos da transformação (II.37).

Se for dado um deslocamento dz em um determinado ponto z , seu correspondente $d\zeta$ sofrerá um deslocamento $d\zeta$, que es crito na forma polar:

$$dz = e^{i\alpha} |dz| \quad d\zeta = e^{i\psi} |d\zeta| \quad (\text{II.40})$$

(1) No plano ζ , visto a transformação realizar-se sobre uma circunferência de raio unitário $\zeta = \delta e^{i\psi}$, as ordenadas δ e ψ se interceptam sempre perpendicularmente e como o ângulo entre segmentos é mantido (característica da transformação), seus correspondentes ξ e η no plano z interceptam-se também perpendicularmente.

de onde se vê, considerando (II.37):

$$e^{i\alpha} = \frac{dz}{|dz|} = \frac{\omega'(\zeta) d\zeta}{|\omega'(\zeta)| |d\zeta|} = e^{i\nu} \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}$$

se $\zeta = \rho e^{i\nu}$, vem:

$$e^{i\alpha} = \frac{\zeta}{\rho} \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}$$

$$e^{2i\alpha} = \frac{\zeta^2}{\rho^2} \frac{\omega'(\zeta)^2}{|\omega'(\zeta)|^2} = \frac{\zeta^2}{\rho^2} \frac{\omega'(\zeta)^2}{\omega'(\zeta)\overline{\omega'(\zeta)}}, \text{ logo:}$$

(II.41)

$$e^{2i\alpha} = \frac{\zeta^2}{\rho^2} \frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}$$

Reescrevendo (II.28) e (II.29) tendo em vista (II.38), obtêm-se as tensões em relação aos eixos x e y em função dos novos potenciais complexos:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2 \left(\frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\overline{\psi'(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}} \right)$$

(II.42)

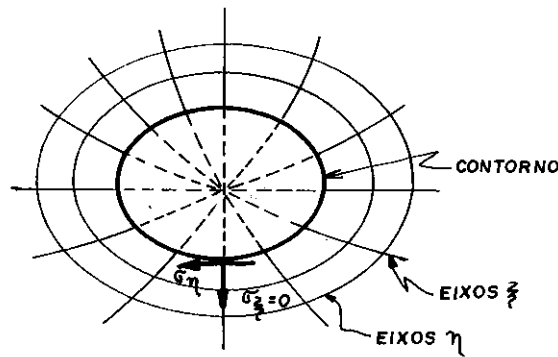
$$\sigma_y - \sigma_x + 2i \tau_{xy} = 2 \left(\frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \cdot \frac{\Phi'}{\omega'(\zeta)} + \frac{\Psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right)$$

Com este resultado, (II.39) e (II.41) encontra-se as tensões em coordenadas curvilíneas:

$$\sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta} = 2\left(\frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\overline{\psi'(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}}\right) \quad (\text{II.43})$$

$$\sigma_{\eta\eta} - \sigma_{\xi\xi} + 2i \tau_{\xi\eta} = \frac{2\zeta^2}{\rho^2 \omega'(\zeta)} (\overline{\omega(\zeta)} \Phi' + \Psi'(\zeta))$$

è as tensões em qualquer ponto podem ser obtidas da equação acima. Se for necessário conhecer as tensões ao longo do contorno, como não hã forças externas aplicadas, basta que se faça $\sigma_{\xi\xi} = 0$, pois tal tensão exigirá cargas aplicadas ao contorno, na primeira equação (II.43)



EIXOS COORDENADOS ξ e η

Fig. II.5

$$\sigma_{\eta\eta} = 2\left(\frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\overline{\psi'(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}}\right) \quad (\text{II.43a})$$

ou

$$\sigma_{\eta\eta} = 4 \operatorname{Re}\left(\frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right)$$

As condições de contorno relativas a esta nova variável ζ podem ser obtidas por uma mudança de variável em (II.34), considerando-se (II.38):

$$\psi(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\psi'(\zeta)} + \overline{\Psi(\zeta)} = f_1' + i f_2' \quad (\text{II.44})$$

onde $f_1' + f_2'$ são as cargas aplicadas ao contorno γ correspondentes às aplicadas no contorno L .

De resto falta somente a determinação de $\psi(\zeta)$ e $\Psi(\zeta)$ para cada problema específico.

Pode-se estimar uma forma para aqueles potenciais e verificar se atendem às condições de contorno (II.44). Se estas forem atendidas, calculam-se as tensões desejadas, pois os potenciais já foram encontradas; Se não forem tentam-se novas formas o que faz com que os potenciais sejam encontrados por tentativa e erro, tornando o processo demorado e carente de beleza. MUSKHELISHVILI (1975), porém, propôs um método para determinação analítica de tais potenciais, aplicável aos casos aqui estudados, exposto a seguir.

II.8 - Determinação dos Potenciais Complexos

Este método baseia-se em integração complexa e requer conhecimento do exposto no item (I.5) deste trabalho. E

válido para condições de contorno do tipo forças prescritas.

Divide-se os potenciais em duas partes:

$$\psi(\zeta) = \psi^*(\zeta) + \psi_0(\zeta) \quad (II.45)$$

$$\Psi(\zeta) = \Psi^*(\zeta) + \Psi_0(\zeta)$$

onde $\psi^*(\zeta)$ e $\Psi^*(\zeta)$ correspondem à chapa sem furo e são facilmente obtidos. $\psi_0(\zeta)$ e $\Psi_0(\zeta)$ levam em conta a perturbação nas tensões causadas pelos furos e, exatamente por isso, não podem afetar o estado tensional no infinito, pois o furo não o afeta. Para a obtenção destes últimos segue-se o abaixo exposto.

Aplicando (II.44) ao contorno:

$$\psi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\psi'(\sigma)} + \overline{\Psi(\sigma)} = f_1' + if_2' \quad (II.46)$$

onde σ é o valor de ζ no contorno. Não havendo cargas aplicadas ao contorno do furo e substituindo (II.45) em (II.46), obtém-se:

$$\psi_0(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\psi_0'(\sigma)} + \overline{\Psi_0(\sigma)} = F_1 + iF_2 \quad (II.47)$$

onde:

$$F_1 + iF_2 = - \{ \psi^*(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\psi^{*'}(\sigma)} + \overline{\Psi^*(\sigma)} \} \quad (II.47a)$$

que $\bar{\epsilon}$ é conhecido se forem conhecidos $\psi^*(\sigma)$ e $\Psi^*(\sigma)$. Multiplicando todos os termos de (II.47) por

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(\sigma - \zeta)}$$

e integrando ao longo da circunferência unitária γ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\psi_0(\sigma)}{(\sigma - \zeta)} d\sigma + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\psi_0'(\sigma)} \frac{d\sigma}{(\sigma - \zeta)} + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\Psi_0(\sigma)}{(\sigma - \zeta)} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F_1 + iF_2}{(\sigma - \zeta)} d\sigma \end{aligned} \quad (\text{II.48})$$

A primeira integral acima vale $\psi(\zeta)$, como se vê da eq. (I.27), no Capítulo I. A terceira integral se anula, como demonstrou TIMOSHENKO (1980)⁽¹⁾. Resta então:

$$\begin{aligned} \psi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\psi_0'(\sigma)} \frac{d\sigma}{(\sigma - \zeta)} = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F_1 + iF_2}{(\sigma - \zeta)} d\sigma \end{aligned} \quad (\text{II.49})$$

Tomando-se a conjugada de (II.47) e seguindo desenvolvimento análogo ao anterior chega-se a:

(1) Ver TIMOSHENKO (1980) - Parágrafo 70.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \psi_0'(\sigma) \frac{d\sigma}{(\sigma-\zeta)} + \psi_0(\zeta) =$$

(II.50)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F_1 - iF_2}{(\sigma-\zeta)} d\sigma$$

onde $F_1 - iF_2$ é o conjugado de (II.47a).

A partir de (II.49) e (II.50) pode-se obter os potenciais complexos $\psi_0(\zeta)$ e $\bar{\psi}_0(\zeta)$; faz-se

$$\psi_0(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$$

(II.51)

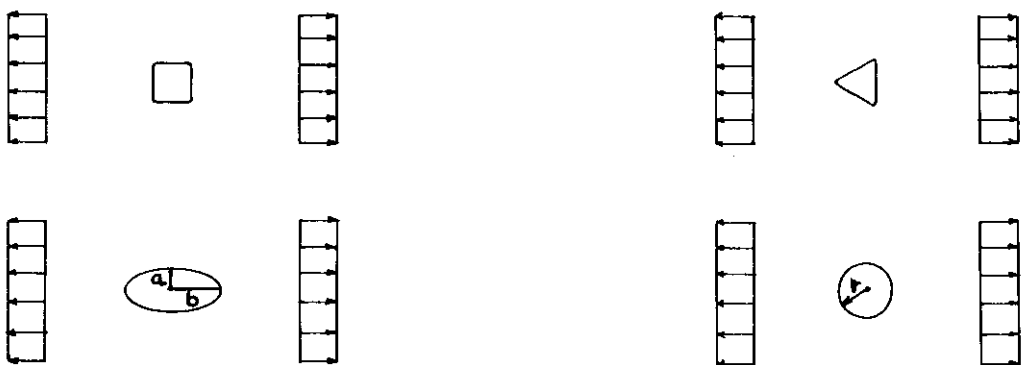
aplica-se ao contorno ($\zeta = \sigma$) e leva-se a (II.49) juntamente com a função $\omega(\sigma)$, que relaciona o plano z com o plano ζ , encontrando desta forma os termos não nulos de (II.51). Este resultado, aplicado em (II.50) permite a obtenção de $\psi_0(\zeta)$ e os potenciais completos saem de (II.45). Em seguida calcula-se as tensões a partir de (II.42), (II.43) ou (II.43a) e o problema, agora, está totalmente resolvido.

CAPÍTULO III - APLICAÇÃO A CHAPAS INFINITAS COM FUROS

CAPÍTULO III

APLICAÇÃO À CHAPAS INFINITAS COM FUROS

Foi apresentado, no Capítulo anterior, um roteiro para resolução de problemas utilizando variáveis complexas, um dos objetivos deste trabalho, seguindo-se agora algumas aplicações, para que melhor se esclareça a formulação do Capítulo II e também para que seja possível atingir o outro objetivo, o teste da precisão do método dos elementos finitos na resolução de problemas de concentração de tensões. Serão resolvidos os quatro problemas mostrados abaixo:



CHAPAS INFINITAS - PROBLEMAS A SE RESOLVER

Fig. III.1

Na resolução de tais problemas, faz-se necessária a obtenção dos potenciais $\psi(z)$ e $\Psi(z)$ para a chapa infinita sem furo. Com uma simples inspeção nas equações (II.28) e (II.29) vê-se que tais potenciais devem ser:

$$\psi^*(z) = \frac{1}{4} T z \quad \text{e} \quad \Psi^*(z) = -\frac{1}{2} T z \quad (\text{III.1})$$

onde T é a tensão aplicada, no infinito. Substituindo os potenciais acima em (II.28) e (II.29) obtém-se:

$$\tau_{xy} = 0$$

$$\sigma_y = 0$$

$$\sigma_x = T$$

o que confirma que estes são os potenciais procurados.

III.1 - CHAPA INFINITA COM FURO CIRCULAR TRACIONADA

Um furo circular, de raio a , em uma placa infinita no plano z pode ter sua região exterior ao furo mapeada no inte

rior da circunferência unitária γ no plano ζ através de:

$$z = \omega(\zeta) = \frac{a}{\zeta} \quad (\text{III.2})$$

Aplicando (III.2) em (III.1), obtem-se:

$$\psi^*(\zeta) = \frac{1}{4} \tau \frac{a}{\zeta} \quad \quad \psi^*(\zeta) = -\frac{1}{2} \tau \frac{a}{\zeta} \quad (\text{III.3})$$

Partindo-se das equações (III.2) e (III.3), determina-se $F_1 + iF_2$ em (II.47a).

$$\omega'(\zeta) = -\frac{a}{\zeta^2} \quad \therefore \quad \overline{\omega'(\sigma)} = -\frac{a}{\overline{\sigma}^2} = -a\sigma^2$$

$$\psi^{*'}(\zeta) = -\frac{1}{4} \tau \frac{a}{\zeta^2} \quad \therefore \quad \overline{\psi^{*'}(\sigma)} = -\frac{1}{4} \tau \frac{a}{\overline{\sigma}^2} = -\frac{1}{4} \tau a \sigma^2$$

visto ser $\sigma = \frac{1}{\overline{\sigma}}$, pois

$$\sigma = e^{i\alpha} \quad e \quad \overline{\sigma} = e^{-i\alpha} = \frac{1}{\sigma i^\alpha} = \frac{1}{\sigma} \quad (\text{III.4})$$

$$F_1 + iF_2 = - \left[\frac{1}{4} T \frac{a}{\sigma} + \frac{a/\sigma}{-a\sigma^2} \left(-\frac{1}{4} Ta\sigma^2 \right) - \frac{1}{2} Ta\sigma \right] \dots$$

(III.5)

$$\therefore F_1 + iF_2 = \frac{1}{2} Ta \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right)$$

o resultado acima levado na equação (II.49) e tendo em vista a (II.51):

$$\psi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(-\frac{1}{\sigma^3} \right) \frac{\bar{a}_1 + \frac{2\bar{a}_2}{\sigma} + \frac{3\bar{a}_3}{\sigma^2} + \dots}{\sigma - \zeta} d\sigma =$$

(III.6)

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\frac{1}{2} Ta \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right)}{\sigma - \zeta} d\sigma$$

A primeira integral acima pode ser vista como um somatório de infinitas integrais, todas elas nulas como nos mostra (I.33).

A segunda delas desmembra-se em duas, a saber:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\frac{1}{2} Ta\sigma}{\sigma - \zeta} d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\frac{1}{2} \frac{Ta}{\sigma}}{\sigma - \zeta} d\sigma$$

onde a segunda delas se anula⁽¹⁾ e a primeira vale⁽¹⁾:

(1) Ver ítem I.5.3

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\frac{1}{2} Ta\sigma}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{1}{2} Ta\zeta$$

obtendo-se de (III.6):

$$\psi_0(\zeta) = \frac{1}{2} Ta\zeta \quad (\text{III.7})$$

Agora, de (II.50):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(-\sigma^3) \frac{1}{2} Ta}{\sigma - \zeta} d\sigma + \psi_0(\zeta) &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\frac{1}{2} Ta \left(\frac{1}{\sigma} - \sigma\right)}{\sigma - \zeta} d\sigma \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

Novamente, de (I.33) e (I.34), vê-se que:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(-\sigma^3) \frac{1}{2} Ta}{\sigma - \zeta} d\sigma = -\frac{1}{2} Ta\zeta^3$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\frac{1}{2} Ta \left(\frac{1}{\sigma} - \sigma \right)}{\sigma - \zeta} d\sigma = -\frac{1}{2} Ta\zeta$$

logo, de (III.8) sai:

$$\psi_0(\zeta) = \frac{1}{2} Ta\zeta - \frac{1}{2} Ta\zeta^3$$

usando (II.45):

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{4} T \frac{a}{\zeta} + \frac{1}{2} Ta\zeta$$

(III.10)

$$\Psi(\zeta) = -\frac{1}{2} T \frac{a}{\zeta} - \frac{1}{2} Ta\zeta + \frac{1}{2} Ta\zeta^3$$

e os potenciais acima resolvem o problema.

As tensões em coordenadas cartesianas podem ser ob
tidas de (II.42):

$$\psi'(\zeta) = -\frac{1}{4} T \frac{a}{\zeta^2} + \frac{1}{2} Ta$$

$$\psi''(\zeta) = \frac{1}{2} T \frac{a}{\zeta^3}$$

$$\psi'(\zeta) = \frac{1}{2} T \frac{a}{\zeta^2} - \frac{1}{2} Ta + \frac{3}{2} Ta\zeta^2$$

$$\omega'(\zeta) = - \frac{a}{\zeta^2}$$

$$\phi' = - T\zeta$$

desta forma, levando-se em conta (I.5) e sabendo que

$$e^{-2i\theta} = \cos 2\theta - i \sin 2\theta \quad \text{e} \quad \zeta = \rho e^{i\alpha}$$

vem:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2 \left[\frac{-\frac{1}{4} T \frac{a}{\zeta^2} + \frac{1}{2} Ta}{-\frac{a}{\zeta^2}} + \frac{-\frac{1}{4} T \frac{a}{\bar{\zeta}^2} + \frac{1}{2} Ta}{-\frac{a}{\bar{\zeta}^2}} \right]$$

$$= 2 \left[\frac{1}{2} T - \frac{1}{2} T \zeta^2 - \frac{1}{2} T \bar{\zeta}^2 \right]$$

$$= T - T\rho^2(\zeta^2 + \bar{\zeta}^2)$$

$$= T - T\rho^2 (e^{2i\alpha} + e^{-2i\alpha})$$

$$= T - T\rho^2 (\cos 2\alpha + i \operatorname{Sen} 2\alpha + \cos 2\alpha - \\ - i\operatorname{Sen} 2\alpha)$$

$$= T - 2 T \rho^2 \cos 2\alpha$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i \tau_{xy} = - \frac{2\zeta^2}{a} \left[\frac{a}{\zeta} \left(- T \zeta \right) + \frac{1}{2} T \frac{a}{\zeta^2} - \frac{1}{2} Ta + \frac{3}{2} Ta\zeta^2 \right]$$

$$= 2T \left[\frac{\zeta^3}{\zeta} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \zeta^2 - \frac{3}{2} \zeta^4 \right]$$

$$= 2T \left[\rho^2 e^{4i\alpha} - \frac{1}{2} + \frac{\rho^2}{2} e^{2i\alpha} - \frac{3\rho^4}{2} e^{4i\alpha} \right]$$

$$= T (2\rho^2 \cos 4\alpha - 1 + \rho^2 \cos 2\alpha - 3\rho^4 \cos 4\alpha) +$$

$$+ iT (2\rho^2 \operatorname{Sen} 4\alpha + \rho^2 \operatorname{Sen} 2\alpha - 3\rho^4 \operatorname{Sen} 4\alpha)$$

logo, resolve-se o sistema:

$$\sigma_x + \sigma_y = T (1 - 2\rho^2 \cos 2\alpha)$$

$$\sigma_y - \sigma_x = T [-1 + \rho^2 \cos 2\alpha + (2\rho^2 - 3\rho^4) \cos 4\alpha]$$

cuja solução fornece:

$$\sigma_x = \frac{T}{2} [-\rho^2 \cos 2\alpha + (2\rho^2 - 3\rho^4) \cos 4\alpha]$$

$$\sigma_y = \frac{T}{2} [2 - 3\rho^2 \cos 2\alpha - (2\rho^2 - 3\rho^4) \cos 4\alpha] \quad (\text{III.11})$$

$$\tau_{xy} = T [\rho^2 \sin 2\alpha + (2\rho^2 - 3\rho^4) \sin 4\alpha]$$

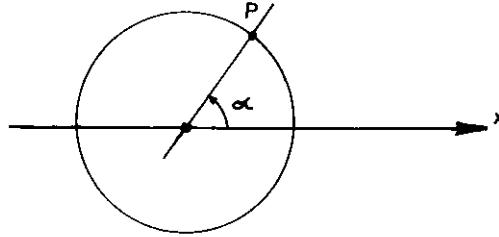
No contorno, $\rho = 1$ (o mapeamento se deu em uma circunferência de raio unitário) e sendo assim as tensões σ_x e σ_y em qualquer ponto do contorno de um furo circular dado em uma chapa infinita tracionada serã:

$$\sigma_x = \frac{T}{2} [-\cos 2\alpha - \cos 4\alpha]$$

$$\sigma_y = \frac{T}{2} [2 - 3 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha] \quad (\text{III.12})$$

$$\tau_{xy} = T [\sin 2\alpha - \sin 4\alpha]$$

onde α é o ângulo que a reta que passa pela origem e pelo ponto em questão faz com o eixo x, medido no sentido anti-horário, conforme a Fig. III.2:



DEFINIÇÃO DO PONTO A SE CALCULAR TENSÕES

Fig. III.2

As tensões poderiam ter sido obtidas em coordenadas polares a partir das equações (II.43) já que estas são as coordenadas curvilíneas em se tratando de contornos circulares.

Com um desenvolvimento análogo ao anterior, chega-se a:

$$\sigma_{rr} = \frac{T}{2} [1 - \rho^2 + (1 - 4\rho^2 + 3\rho^4) \cos 2\alpha]$$

(III.13)

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{T}{2} [1 + \rho^2 - (1 + 3\rho^4) \cos 2\alpha]$$

no contorno, com $\rho = 1$

$$\sigma_{rr} = 0$$

(III.14)

$$\sigma_{\theta\theta} = T [1 - 2 \cos 2\alpha]$$

a máxima tensão ocorre para $\theta = 90^\circ$ e:

$$\sigma_{rr} = 0$$

(III.14a)

$$\sigma_{\theta\theta} = 3 T$$

Este problema em particular, poderia ter sido resolvido diretamente em termos dos potenciais complexos $\psi(z)$ e $\bar{\psi}(z)$, devido a simplicidade da transformação inversa a (III.2)

$$\zeta = \frac{a}{z}$$

(III.14b)

bastando para isso que se substitua (III.15) em (III.10), obten

do-se os potenciais em função de z .

As tensões em qualquer ponto fora do contorno podem ser obtidas fazendo

$$\rho = \frac{a}{r}, \quad r = \text{distância da origem até o ponto em questão}$$

nas fórmulas (III.11) ou (III.13). Estes valores não são objeto deste trabalho, uma vez que as máximas tensões ocorrem no contorno do furo e neste local se testará o método dos elementos finitos.

III.2 - Chapa Infinita com Furo Quadrado, Tracionada

A transformação

$$z = \omega(\zeta) = c \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{6} \zeta^3 \right) \quad (\text{III.15})$$

onde $c = \frac{3a}{5}$, a = lado do quadrado

transforma o exterior de um plano infinito com furo quadrado no interior de uma circunferência unitária no plano ζ .

A equação do contorno do furo pode ser obtida da pr \overline{o}

pria (III.15), com $\rho = 1$:

$$x + iy = c \left(\frac{1}{\rho e^{i\theta}} - \frac{1}{6} \rho^3 e^{3i\theta} \right), \text{ com } \rho = 1, \text{ vem:}$$

$$= c \left(\frac{1}{e^{i\theta}} - \frac{1}{6} e^{3i\theta} \right)$$

$$= c \left[(\cos \theta - i \sin \theta) - \frac{1}{6} (\cos 3\theta + i \sin 3\theta) \right]$$

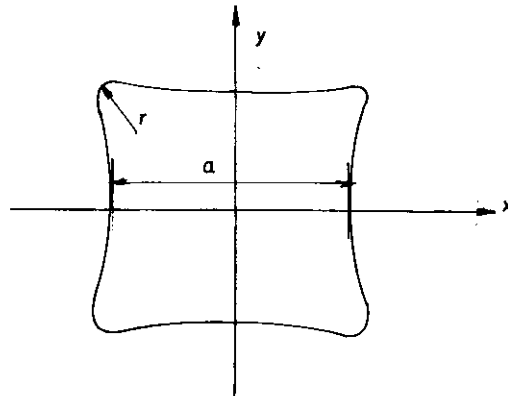
por separação das partes real e imaginária

$$x = c \left(\cos \theta - \frac{1}{6} \cos 3\theta \right)$$

(III.16)

$$y = c \left(\sin \theta - \frac{1}{6} \sin 3\theta \right)$$

que é um quadrado com os lados levemente curvados como mostra na figura III.3:



APROXIMAÇÃO DO FURO QUADRADO

Fig. III.3

Fazendo $\Theta = 0$ em (III.16):

$$a = \frac{3}{5} c \quad \text{ou} \quad c = \frac{5}{3} a$$

O raio de curvatura dos cantos \bar{e} facilmente obtido (1):

$$r = \frac{c}{10} = \frac{3a}{50}$$

Aplicando (III.15) em (III.1), obtem-se:

$$\psi^*(z) = \frac{1}{4} Tc \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{6} \zeta^3 \right) \quad (\text{III.17})$$

$$\Psi^*(z) = - \frac{1}{2} Tc \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{6} \zeta^3 \right)$$

A partir de um desenvolvimento totalmente análogo ao anterior, com furo circular, vem:

$$f_1 + if_2 = - \frac{1}{2} Tc \left[\frac{1}{\sigma} - \sigma - \frac{\sigma^3}{6} + \frac{1}{6\sigma^3} \right] \quad (\text{III.18})$$

$$\psi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(1/\sigma - 1/6\sigma^3)}{(-\sigma^2 - 1/2\sigma^2)} (a_1 + \frac{2a_2}{\sigma} + \frac{3a_3}{\sigma^2} + \dots)$$

$$\frac{d}{\sigma - \zeta} =$$

(1) Ver AVILA (1974)

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} -\frac{1}{2} T_c \left[\frac{1}{\sigma} - \sigma - \frac{\sigma^3}{6} + \frac{1}{6\sigma^3} \right] \frac{d}{\sigma - \zeta}$$

cuja solução fornece:

$$\psi_0(\zeta) = T_c \left[\frac{3}{7} \zeta + \frac{1}{12} \zeta^3 \right] \quad (\text{III.18a})$$

assim:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(1/\sigma - 1/6\sigma^3)}{(-\sigma^2 - 1/2\sigma^2)} \cdot \left[T_c \left(\frac{3}{7} + \frac{1}{4} \sigma^2 \right) \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \psi_0(\zeta) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \left(-\frac{1}{2} T_c \right) \int_{\gamma} \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} + \frac{\sigma^3}{6} - \frac{1}{6\sigma^3} \right) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$$

obtendo-se:

$$\psi_0(\zeta) = -\frac{1}{4} T_c \left(2\zeta + \frac{1}{3} \zeta^3 \right) -$$

(III.19)

$$- \frac{1}{3\zeta} \cdot \frac{1 - 6\zeta^4}{2 + \zeta^4} \cdot T_c \left(\frac{3}{7} + \frac{1}{4} \zeta^2 \right) + \frac{T_c}{14\zeta}$$

tendo em vista (II.45), vem:

$$\psi(\zeta) = Tc \left(\frac{3}{7} \zeta + \frac{1}{4\zeta} + \frac{1}{24} \zeta^3 \right) \quad (\text{III.20})$$

$$\Psi(\zeta) = -Tc \left(\frac{1}{2\zeta} + \frac{91\zeta - 78\zeta^3}{168 + 84\zeta^4} \right)$$

As tensões no contorno do furo, em coordenadas curvilíneas, podem ser obtidas de (II.43a), para $\rho = 1$:

$$\sigma_{\xi\xi} = 0$$

$$\sigma_{\eta\eta} = \frac{4T}{C^2 + D^2} (AC + BD) \quad , \text{ onde:} \quad (\text{III.21})$$

$$A = 14 - 24 \cos 2\theta - 7 \cos 4\theta$$

$$B = -24 \sin 2\theta - 7 \sin 4\theta^{(1)}$$

$$C = 56 + 28 \cos 4\theta$$

$$D = 28 \sin 4\theta$$

III.3 - Chapa Infinita com Furo Elíptico Tensionada

A transformação

(1) A expressão para B, dada por SAVIN (1961) na pág. 50, tem um pequeno erro de impressão. A expressão correta é a indicada acima.

$$z = \omega(\zeta) = c \left(\frac{1}{\zeta} + m\zeta \right) \quad , \text{ onde} \quad (\text{III.22})$$

$$c = \frac{1}{2} (a + b) \quad \text{e} \quad m = \frac{a - b}{a + b}$$

transforma a região exterior a uma elipse de semi-eixos a e b , conforme a Fig. III.16, no interior de um círculo unitário no plano ζ . A equação da elipse pode ser obtida da mesma forma que no item anterior, para o furo quadrado.

Aplicando (III.16) em (III.1):

$$\psi^*(\zeta) = \frac{1}{4} T_c \left(\frac{1}{\zeta} + m\zeta \right) \quad (\text{III.23})$$

$$\Psi^*(\zeta) = - \frac{1}{2} T_c \left(\frac{1}{\zeta} + m\zeta \right)$$

Exatamente da mesma maneira que nos dois exemplos anteriores e suprimindo passos intermediários obtém-se:

$$\psi(\zeta) = \frac{T_c}{4} \left[\frac{1}{\zeta} + (2 - m) \right] \quad (\text{III.24})$$

$$\Psi(\zeta) = - \frac{T_c}{2} \left[\frac{1}{\zeta} + \frac{\zeta^3 + (m - m^2 - 1)\zeta}{m\zeta^2 - 1} \right]$$

Das equações (II.43a), com $\rho = 1$, obtem-se as tensões no contorno, em coordenadas curvilíneas

$$\sigma_{\eta\eta} = T \frac{(1 - m^2 + 2m - 2 \cos 2\theta)}{(1 - 2m \cos 2\theta + m^2)} \quad (\text{III.25a})$$

ou, em termos de $k = a/b$

$$\sigma_{\eta\eta} = \frac{(\text{Sen}^2\theta + 2k \text{Sen}^2\theta - k^2 \text{Sen}^2\theta)}{\text{Sen}^2\theta + k^2 \text{Cos}^2\theta} \quad (\text{III.25b})$$

A máxima tensão ocorre para $\theta = 90^\circ$, logo:

$$\sigma_{\eta\eta}^{\text{MAX}} = T \left(1 + 2 \frac{b}{a}\right) \quad (\text{III.26})$$

III.4 - Chapa Infinita com Furo Triangular Tractionada

Usando a transformação

$$z = \omega(\zeta) = c \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{3} \zeta^2 \right) \quad (\text{III.27})$$

pode-se mapear o exterior de um contorno triangular no interior

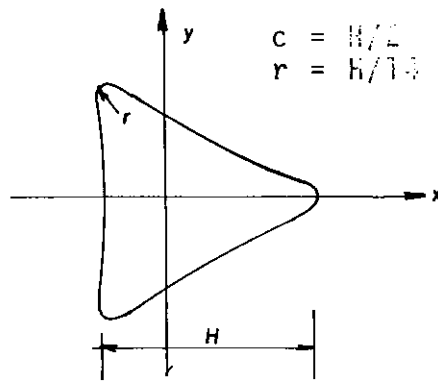
de um círculo unitário no plano ζ . Com um procedimento idêntico ao adotado para o furo quadrado, obtem-se:

$$x = c \left(\cos \theta + \frac{1}{3} \cos 2\theta \right)$$

(III.28)

$$y = c \left(-\sin \theta + \frac{1}{3} \sin 2\theta \right)$$

Plotadas as curvas acima, obtem-se o triângulo com os lados levemente curvados mostrado na Fig. III.7 abaixo:



APROXIMAÇÃO DO FURO TRIANGULAR

Fig. III.4

Tendo em vista (III.27), de (III.1) vem:

$$\psi^*(\zeta) = \frac{1}{4} T_c \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{3} \zeta^2 \right)$$

(III.29)

$$\psi^*(\zeta) = -\frac{1}{2} T_c \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{3} \zeta^2 \right)$$

A partir daí, segue-se os mesmos passos anteriores, obtendo-se:

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{4} T_c \left(\frac{1}{\zeta} + 2\zeta - \frac{1}{3} \zeta^2 \right)$$

(III.30)

$$\Psi(\zeta) = -T_c \left(\frac{1}{2\zeta} + \frac{9\zeta^3 - 11\zeta + 3}{12\zeta^3 - 18} \right)$$

Da equação (III.43a) pode-se obter as tensões no contorno, com $\rho = 1$:

$$\sigma_{\theta} = T \frac{(AC + BD)}{C^2 + D^2}, \text{ onde} \quad (III.31)$$

$$A = 2 - \cos 2\alpha - \frac{2}{3} \cos \alpha$$

$$B = \sin 2\alpha - \frac{2}{3} \sin \alpha$$

$$C = -\cos 2\alpha - \frac{2}{3} \cos \alpha$$

$$D = \text{Sen } 2\alpha + 2/3 \text{ Sen } \alpha$$

CAPÍTULO IV - APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

CAPÍTULO IV

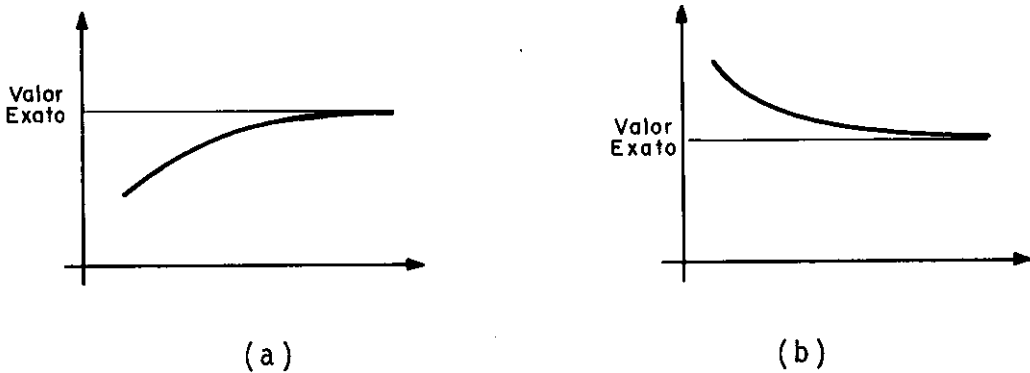
APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos é suficientemente conhecido e sendo assim não será abordado em profundidade neste trabalho, podendo ser encontrado em excelentes trabalhos de vários autores como DESAI - ABEL (1972) ou ZIENKIEWICK (1974). Neste Capítulo será dada mais ênfase ao tipo de malha utilizada e aos resultados obtidos, uma vez terem sido analisadas umas 180 (cento e oitenta) listagens de resultados, garantindo assim consistência às conclusões do próximo Capítulo.

IV.1 - O Elemento Utilizado

Usou-se neste estudo um elemento quadrilátero de lados retos, possuindo quatro pontos nodais colocados em seus vértices. Foi desenvolvido segundo a formulação de elementos isoparamétricos e sobre seus lados a variação de deslocamentos é linear. O modelo é compatível ou, como também conhecido, de deslocamentos, o que obriga sua convergência a ser uniforme, podendo ser feita por baixo ou por cima, conforme Fig. (IV.1); possui duas incógnitas nodais, U e V . É um elemento específico para estado plano de tensões e está disponível no PROJETO LE

BRE, então utilizado, desenvolvido em conjunto pela UFRJ/COPPE-UFP-UFRS sob a coordenação do Professor A. J. FERRANTE. Maiores detalhes sobre o elemento podem ser encontrados em ZIENKIEWICK (1967) ou CHAGAS FILHO (1974).



CONVERGÊNCIA "POR BAIXO"

CONVERGÊNCIA "POR CIMA"

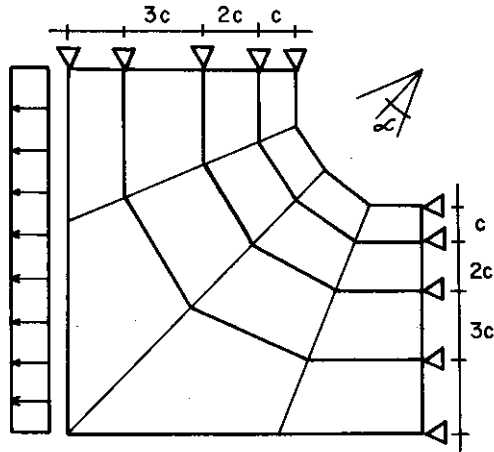
CONVERGÊNCIA DE MODELOS COMPATÍVEIS

FIG. (IV.1)

IV.2 - Escolha da Malha

Seguindo recomendações da bibliografia corrente, como a de ZIENKIEWICK (1967), e após alguns testes preliminares realizados em uma chapa com furo circular, optou-se por uma malha concêntrica ao furo, com as coordenadas de n^os consecutivos variando em progressão aritmética, de razão C, a medida que ficam mais distantes do furo, tentando melhor expressar a grande variação de tensões na região próxima a ele; além disso, o problema em questão possui dois eixos de simetria, possibilitando a análise de apenas 1/4 da chapa, reduzindo bastante o tempo

de processamento e a quantidade de dados de entrada. a Figura abaixo ilustra a malha utilizada



MALHA PADRÃO

FIG. (IV.2)

IV.3 - Confiabilidade dos Resultados

Existem diversos fatores a influenciar nos resultados obtidos através do uso do método dos elementos finitos, como elemento usado, tipo de malha e refinamento desta. Neste ponto, uma vez já escolhido o tipo do elemento e o "lay-out" da malha, resta apenas ser garantida a convergência do método, já que o elemento descrito no item anterior é correntemente utilizado e comprovadamente convergente. Para tal, achou-se por bem traçar a curva de convergência específica para cada problema resolvido, variando a distância "c" entre elementos, conforme a Fig (IV.2), e o ângulo "α", radial em relação ao furo. Desta forma, escolheram-se 04 ângulos diferentes e para cada um deles procedeu-se a análise com 05 valores de "c", dispondo-se desta

maneira de 20 listagens por problema resolvido, para que se tenha certeza do valor para o qual o método converge, em relação ao qual serão tiradas todas as conclusões desta etapa.

IV.4 - Problemas Resolvidos

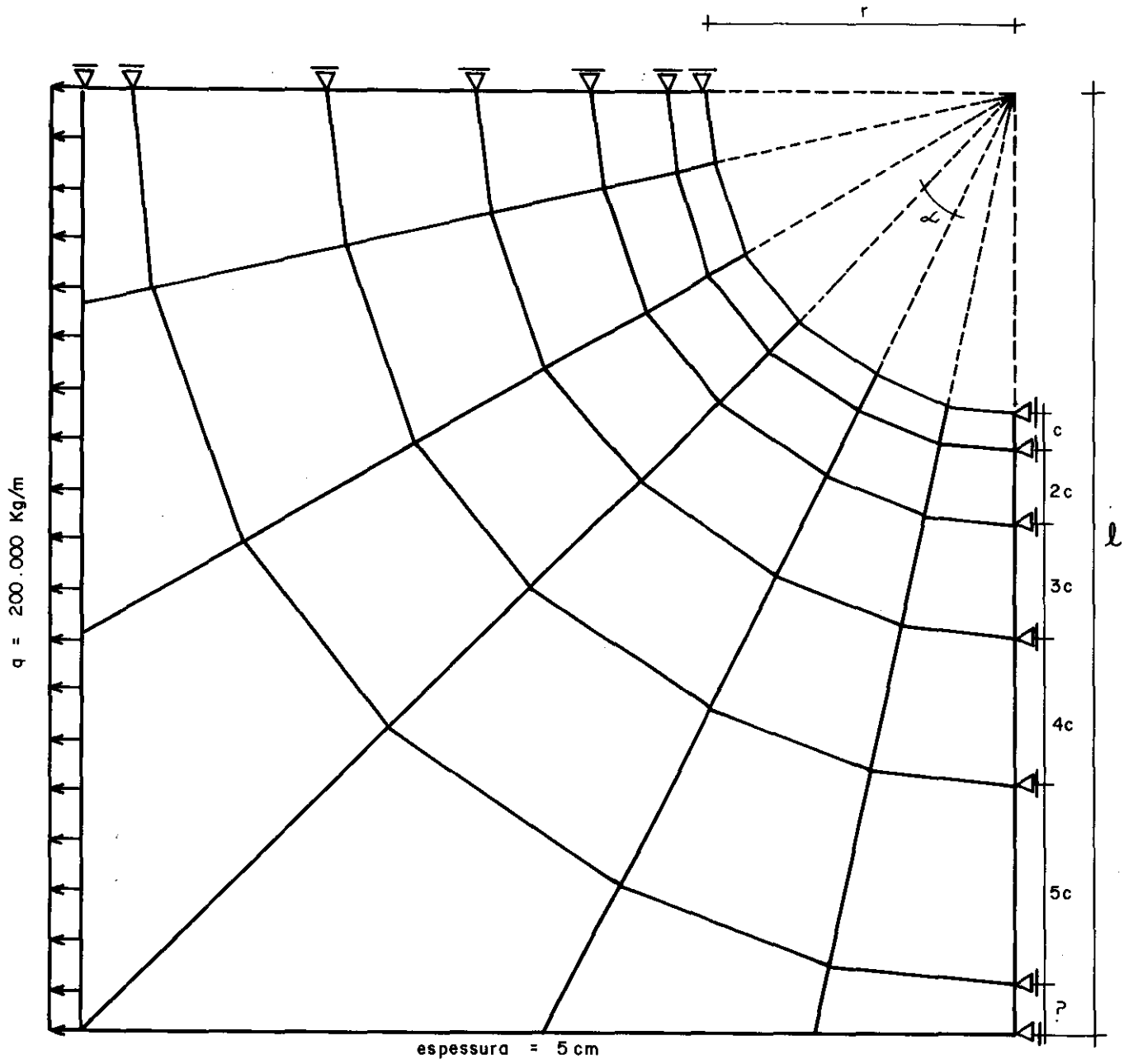
Tem-se a solução, desenvolvida teoricamente no Cap. III, para a chapa INFINITA com os furos indicados na Figura (III.1). Para que este mesmo problema possa ser resolvido através do método de que trata este Capítulo, é necessário que se definam contornos na chapa furada, o que alteraria o estado tensional ao redor do furo invalidando qualquer comparação destes com aqueles. Um dos objetivos deste trabalho é exatamente estudar esta influência e, para tal, resolveu-se cada problema diversas vezes variando a distância dos contornos ao furo de forma a possibilitar o estudo supra citado.

Foram analisadas por elementos finitos apenas as chapas com furo circular e elíptico pois suas soluções teóricas, dadas no Capítulo III, são exatas, o que não ocorre com a obtida para os furos triangular e quadrado, em cujo desenvolvimento utilizou-se uma aproximação para o contorno do furo, fazendo com que a solução ficasse também aproximada; Como se deseja exatamente comparar os resultados deste potente método numérico com os resultados teóricos EXATOS, concluindo assim pela adequação de tal metodologia ao problema, as comparações só poderiam ser feitas com soluções exatas, como as obtidas para os furos circular e elíptico, ficando a resolução dos dois problemas restantes como ilustração do tratamento teórico dado no Capítulo II.

Definidos o tipo de elemento, malha utilizada, problemas a resolver, resta apenas tecer algumas palavras sobre o que exatamente será comparado. As comparações serão feitas em relação à máxima tensão obtida na chapa, que ocorrerá no ponto tangente ao contorno do furo, na direção da solicitação, como se pode ver nos itens (III.1) e (III.3) deste trabalho.

A seguir estão indicadas as malhas utilizadas na análise da chapa com furo circular e na Tabela (IV.1) tem-se a tensão desenvolvida no ponto acima citado para cada um dos 173 problemas analisados pelo método dos elementos finitos. Aplicou-se às chapas uma tensão, como na Figura (III.1), de 200.000 Kg/m^2 para que fiquem minimizados os erros devido a truncamentos em casas decimais.

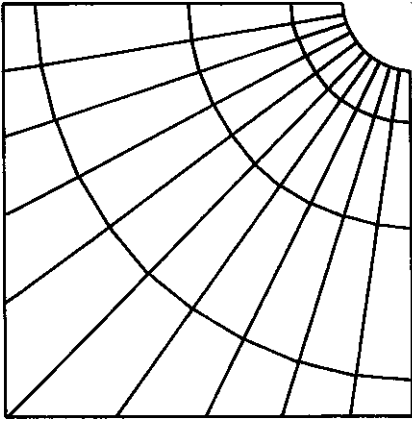
No furo elíptico, além da influência dos contornos, achou-se por bem verificar ainda a variação das tensões devidas a alterações na relação entre o comprimento de seus semi-eixos e estudou-se elipses com 03 relações diferentes. Para cada uma delas, procedeu-se uma análise análoga à realizada para a chapa com furo circular.



MALHA PADRÃO - FURO CIRCULAR

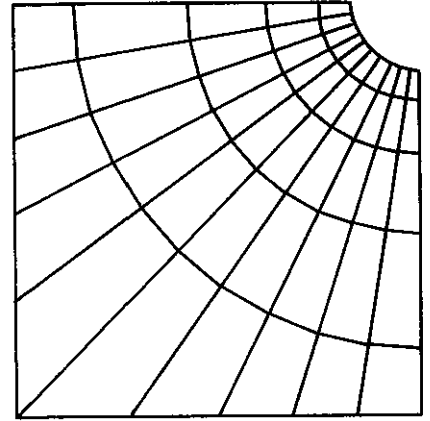
FIG. IV.3

Seguem-se as 60 malhas analisadas para o furo circular.



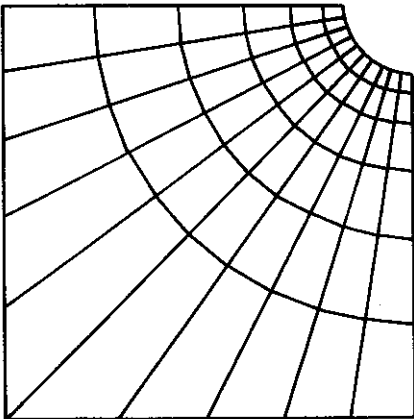
$$\mathcal{L} = 9^\circ$$

$$a = 1/8$$



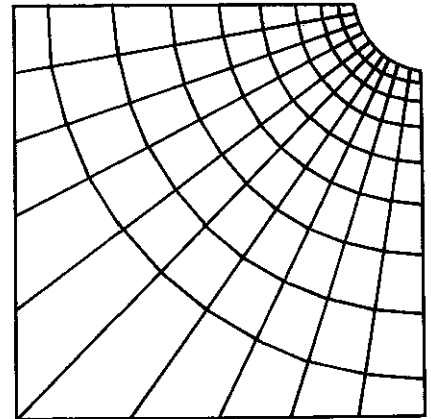
$$\mathcal{L} = 9^\circ$$

$$a = 1/15$$



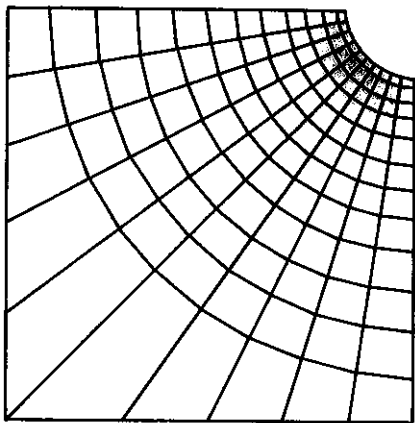
$$\mathcal{L} = 9^\circ$$

$$a = 1/25$$



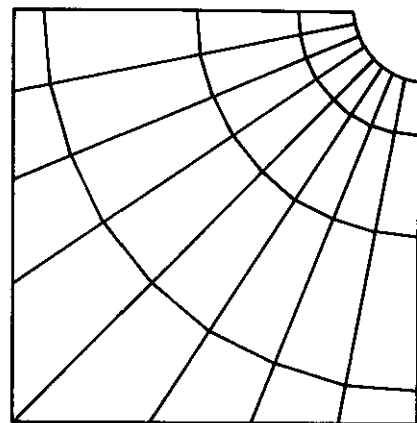
$$\mathcal{L} = 9^\circ$$

$$a = 1/50$$



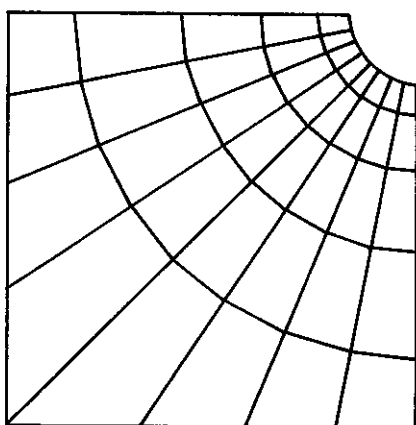
$$\mathcal{L} = 9^\circ$$

$$\alpha = 1/100$$



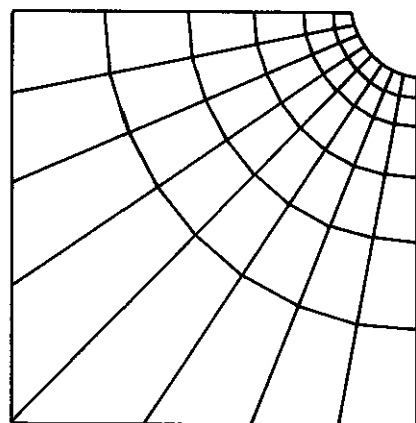
$$\mathcal{L} = 11,25^\circ$$

$$\alpha = 1/8$$



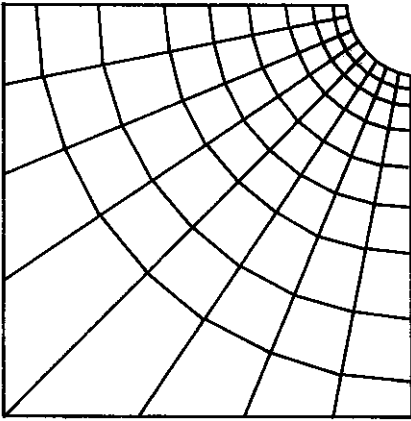
$$\mathcal{L} = 11,25^\circ$$

$$\alpha = 1/15$$

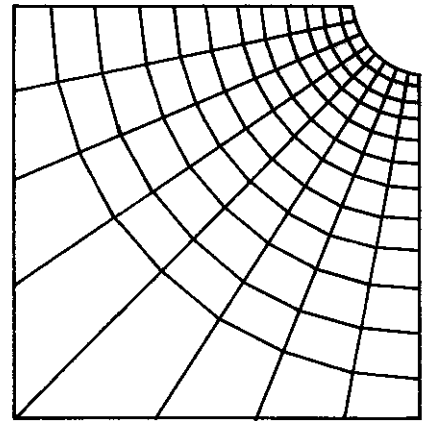


$$\mathcal{L} = 11,25^\circ$$

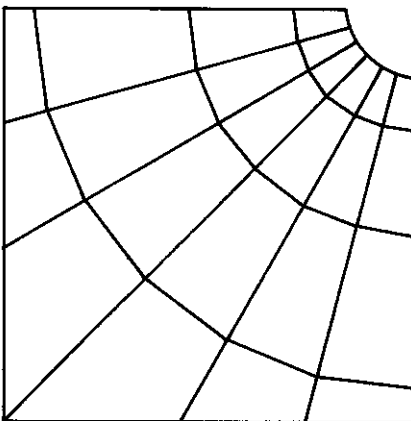
$$\alpha = 1/25$$



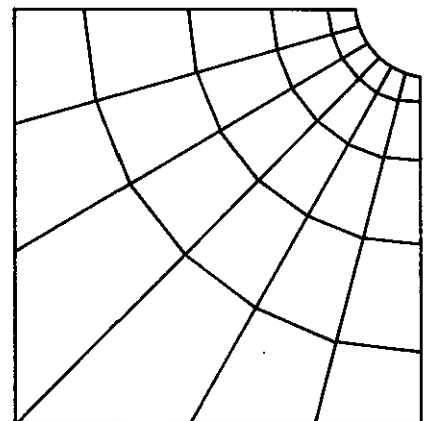
$\mathcal{L} = 11,25^\circ$ $\alpha = 1/50$



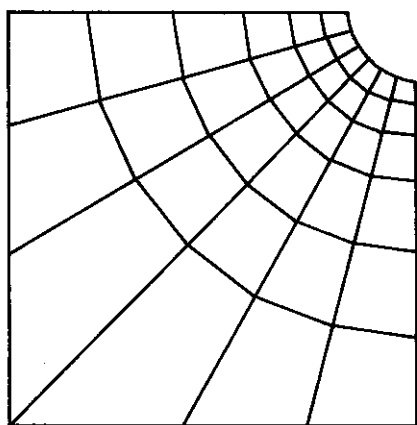
$\mathcal{L} = 11,25^\circ$ $\alpha = 1/100$



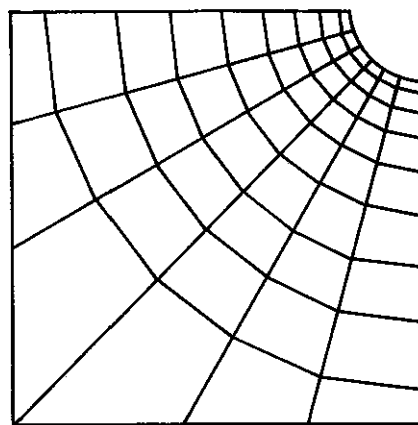
$\mathcal{L} = 15^\circ$ $\alpha = 1/8$



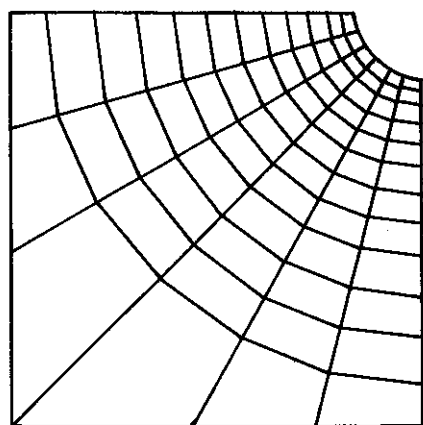
$\mathcal{L} = 15^\circ$ $\alpha = 1/15$



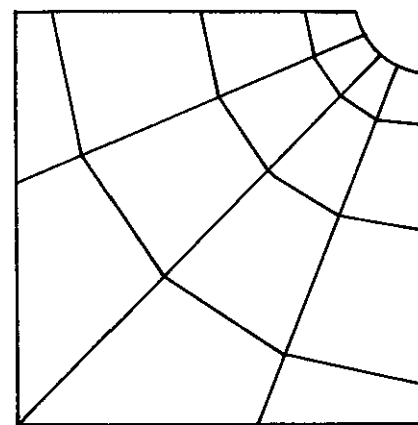
$\angle = 15^\circ$ $\alpha = 1/25$



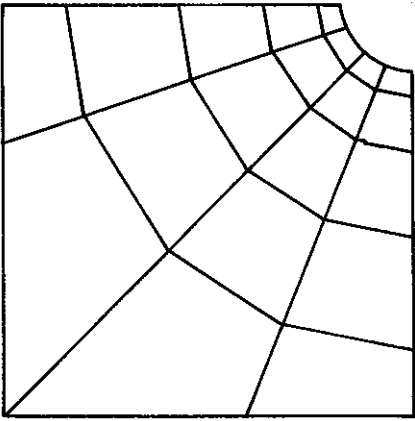
$\angle = 15^\circ$ $\alpha = 1/50$



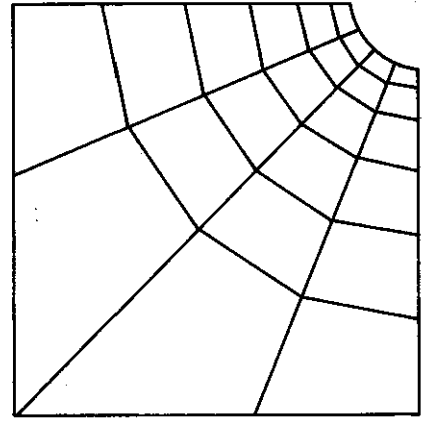
$\angle = 15^\circ$ $\alpha = 1/100$



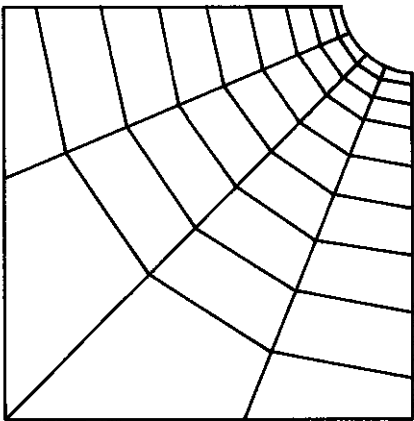
$\angle = 22,5^\circ$ $\alpha = 1/8$



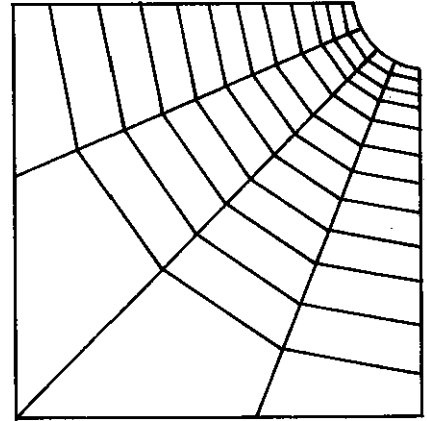
$\alpha = 22,5^\circ$ $a = 1/15$



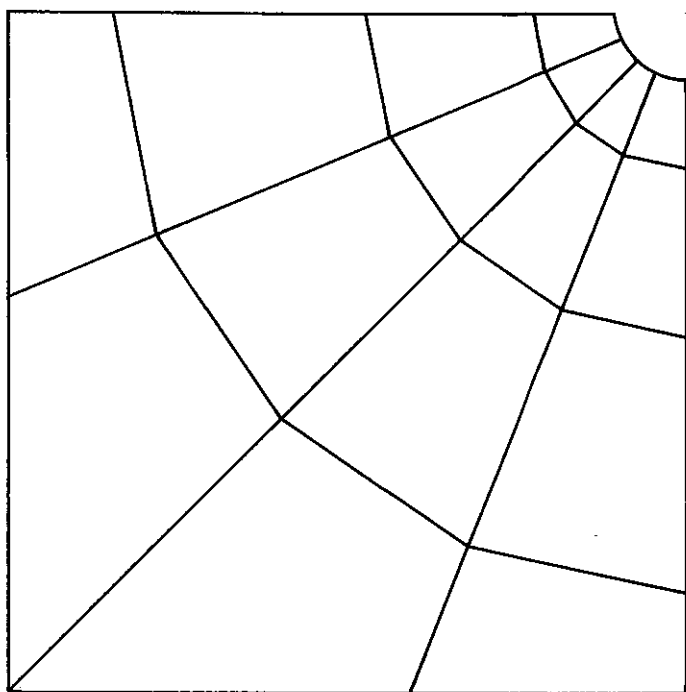
$\alpha = 22,5^\circ$ $a = 1/25$



$\alpha = 22,5^\circ$ $a = 1/50$

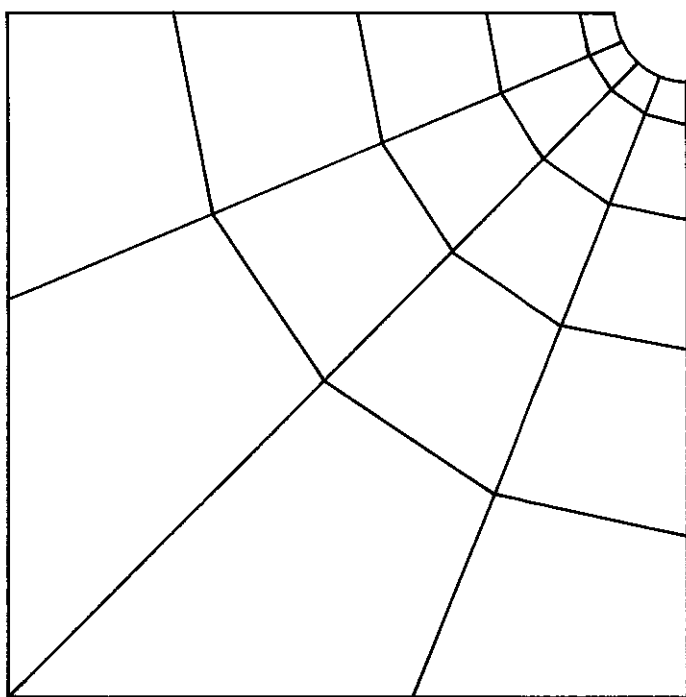


$\alpha = 22,5^\circ$ $a = 1/100$



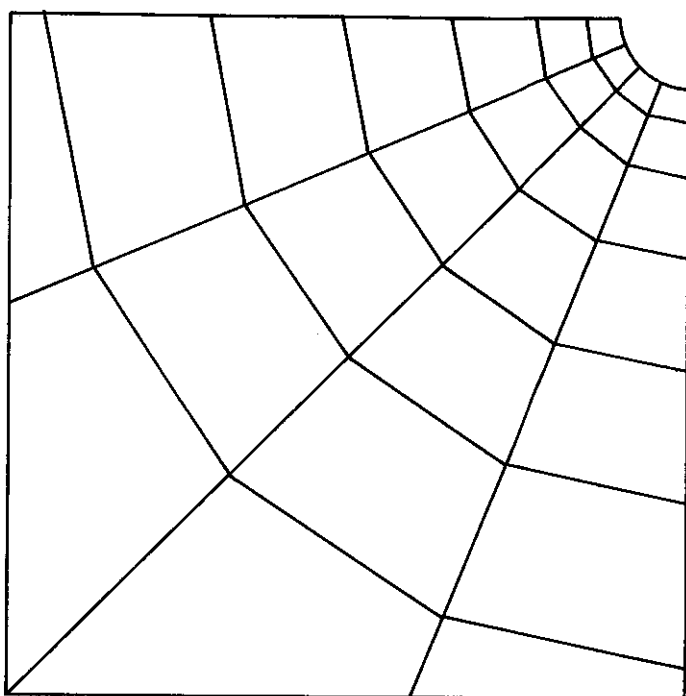
$$\alpha = 22,5^\circ$$

$$\alpha = 1/8$$



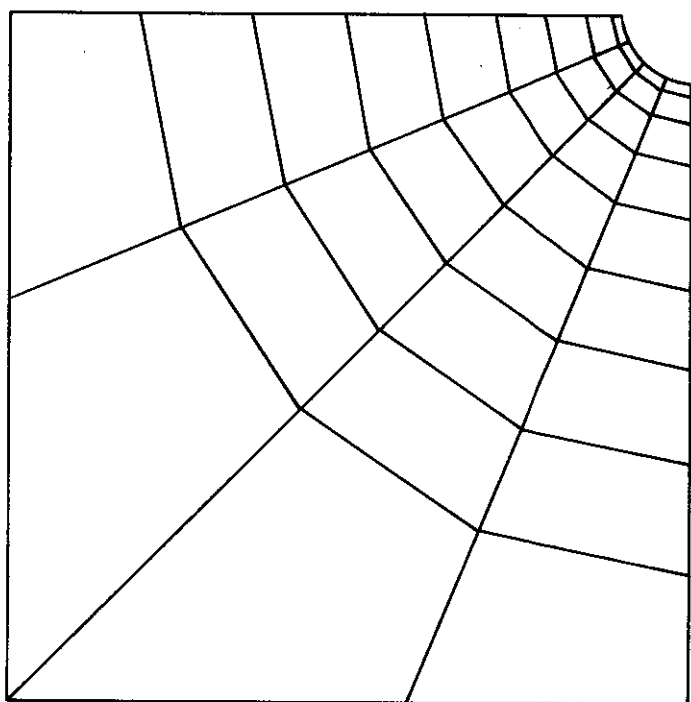
$$\alpha = 22,5^\circ$$

$$\alpha = 1/15$$



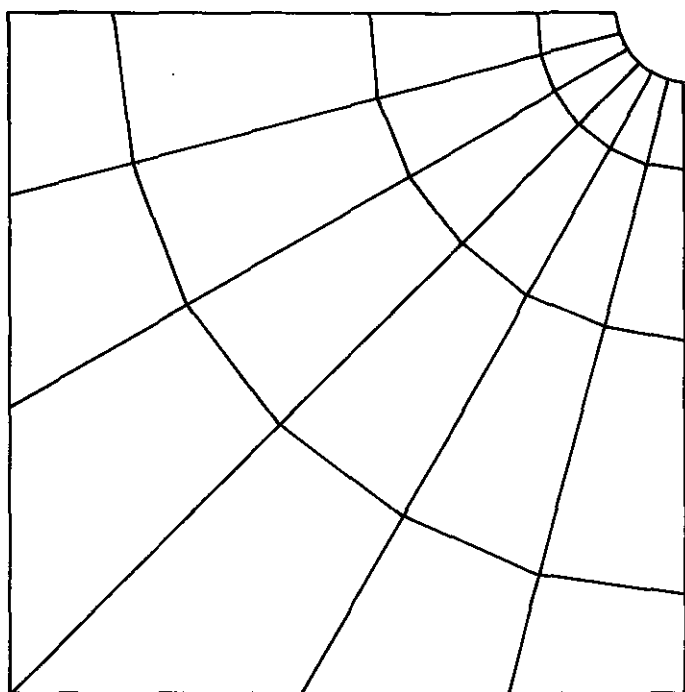
$$\mathcal{L} = 22,5^\circ$$

$$\alpha = 1/25$$



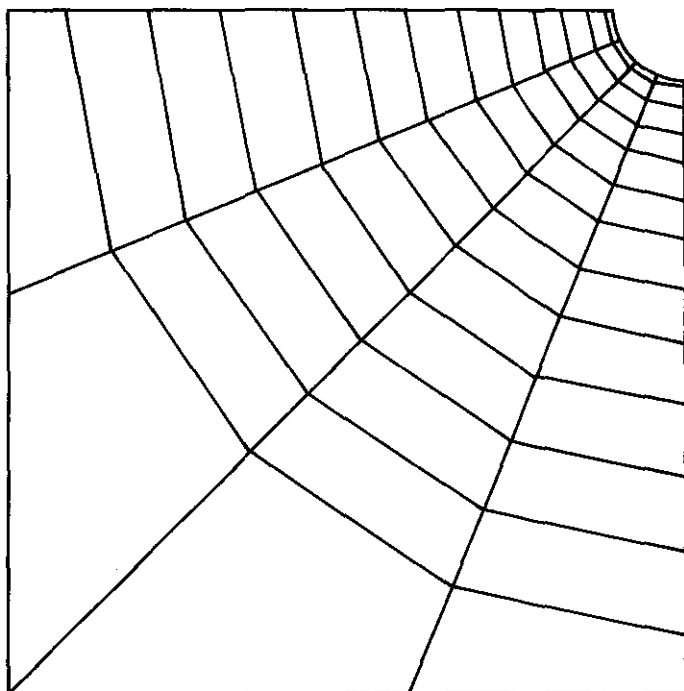
$$\mathcal{L} = 22,5^\circ$$

$$\alpha = 1/50$$



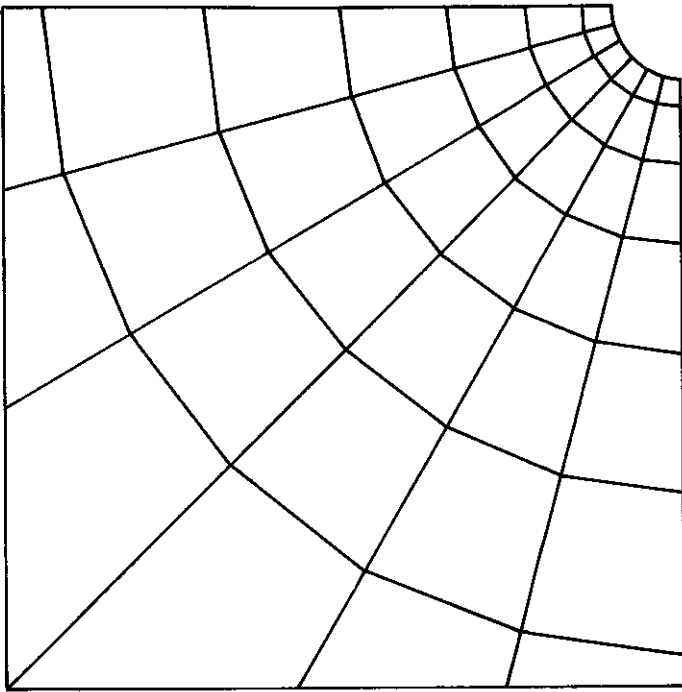
$$L = 15^\circ$$

$$\alpha = 1/8$$



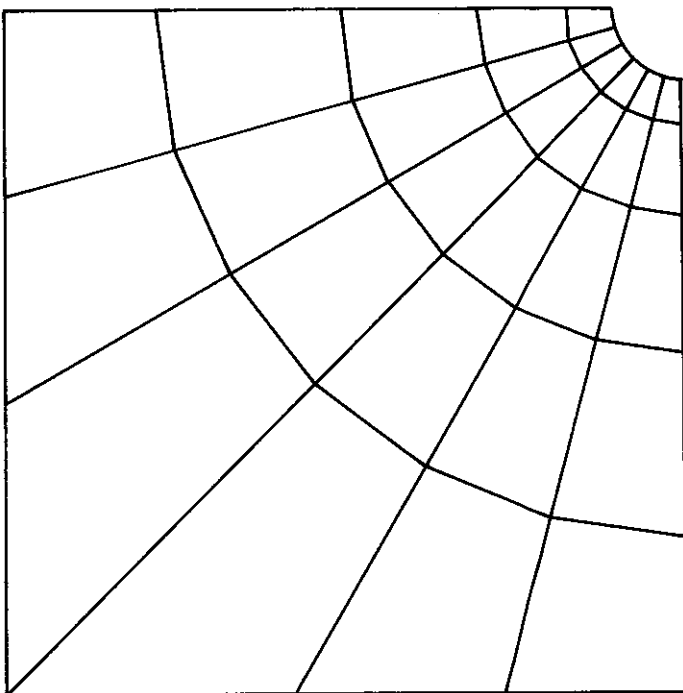
$$L = 22,5^\circ$$

$$\alpha = 1/100$$



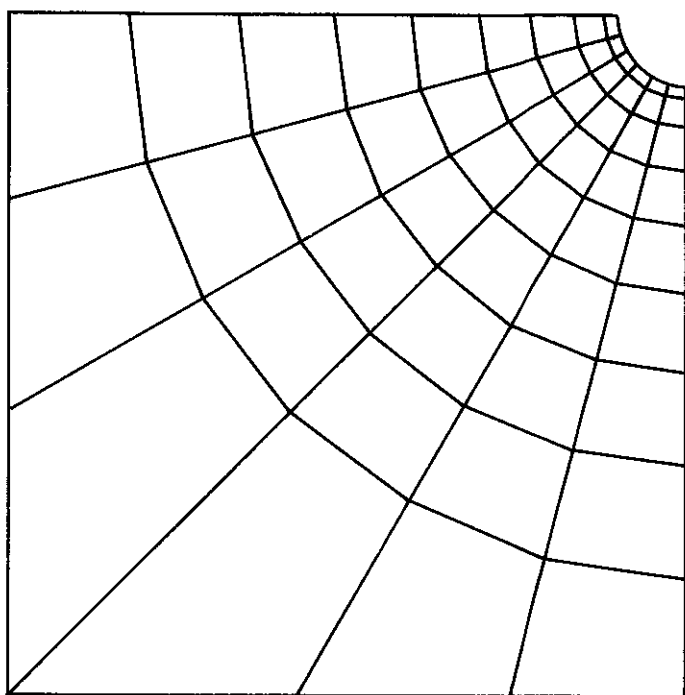
$$\mathcal{L} = 15^\circ$$

$$\alpha = 1/25$$



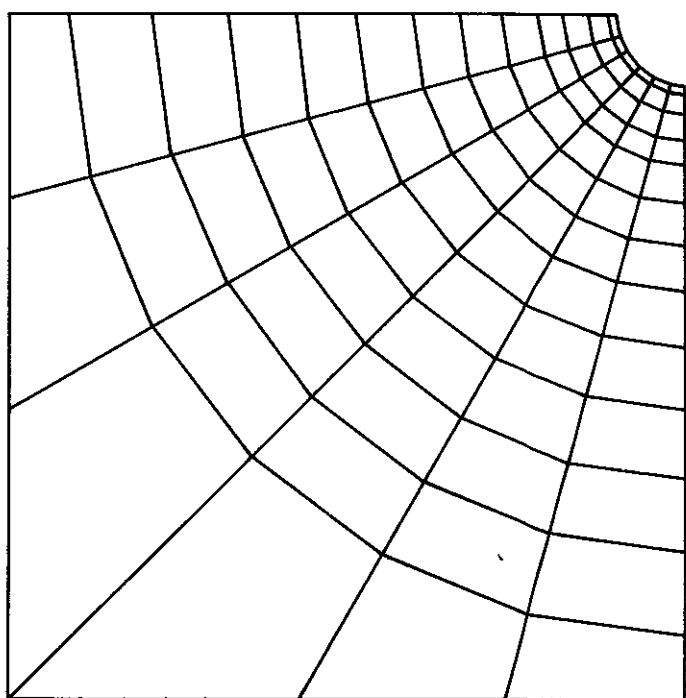
$$\mathcal{L} = 15^\circ$$

$$\alpha = 1/15$$



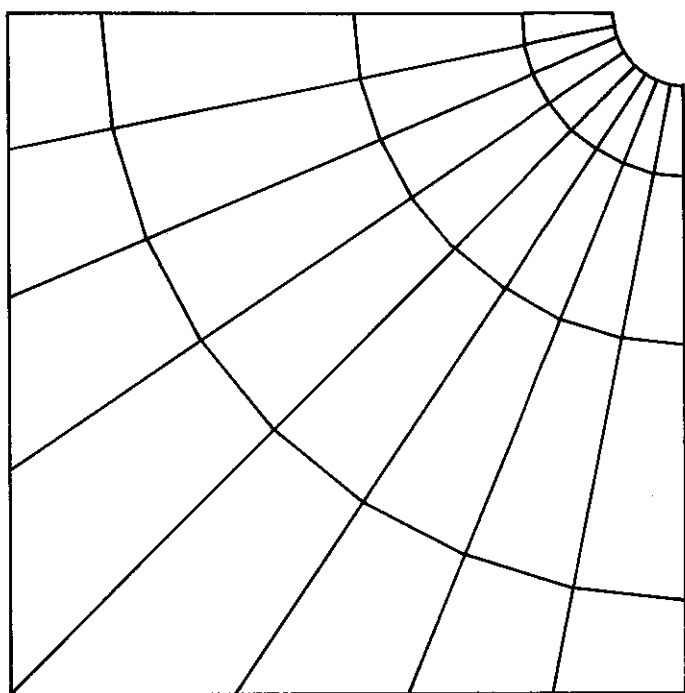
$\mathcal{L} = 15^\circ$

$\alpha = 1/50$



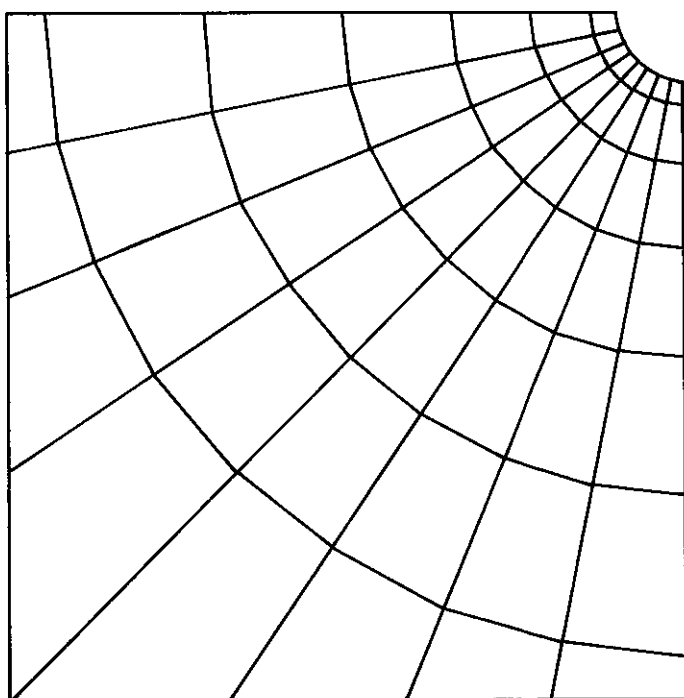
$\mathcal{L} = 15^\circ$

$\alpha = 1/100$



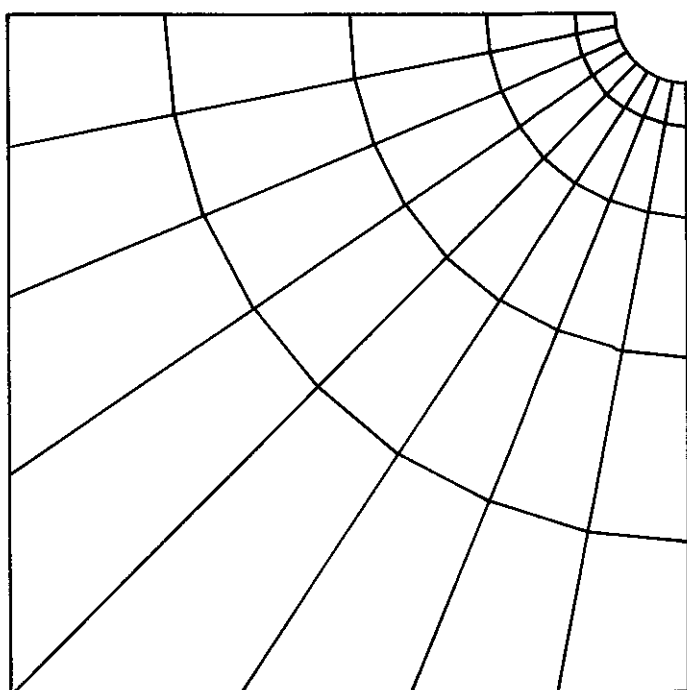
$$\alpha = 11,25^\circ$$

$$a = 1/8$$



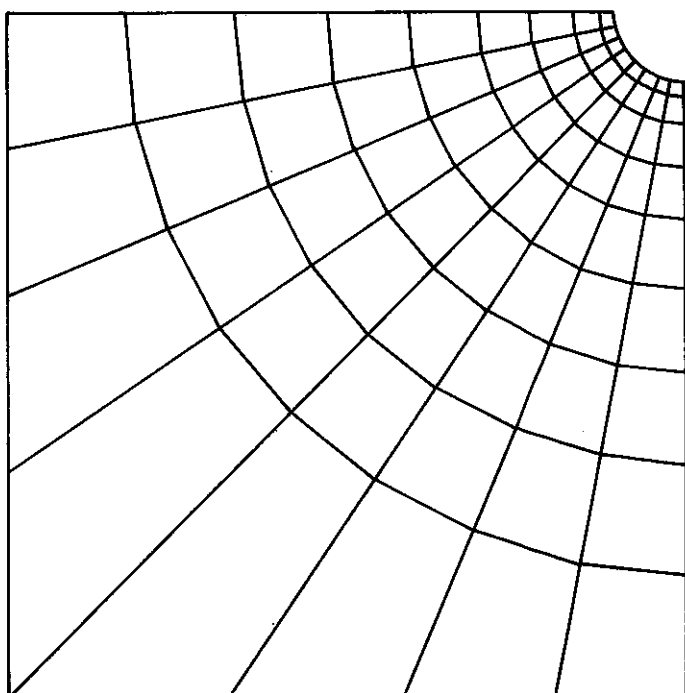
$$\alpha = 11,25^\circ$$

$$a = 1/25$$



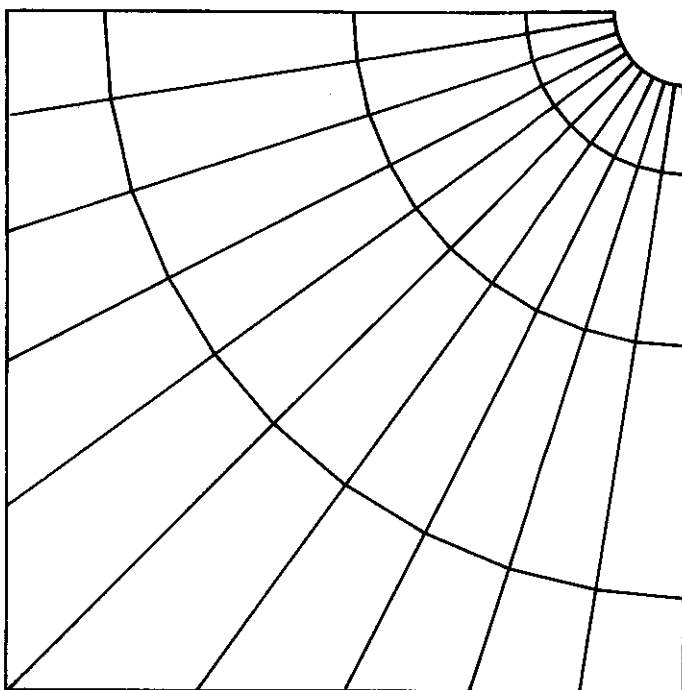
$$\mathcal{L} = 11, 25^\circ$$

$$\alpha = 1/15$$



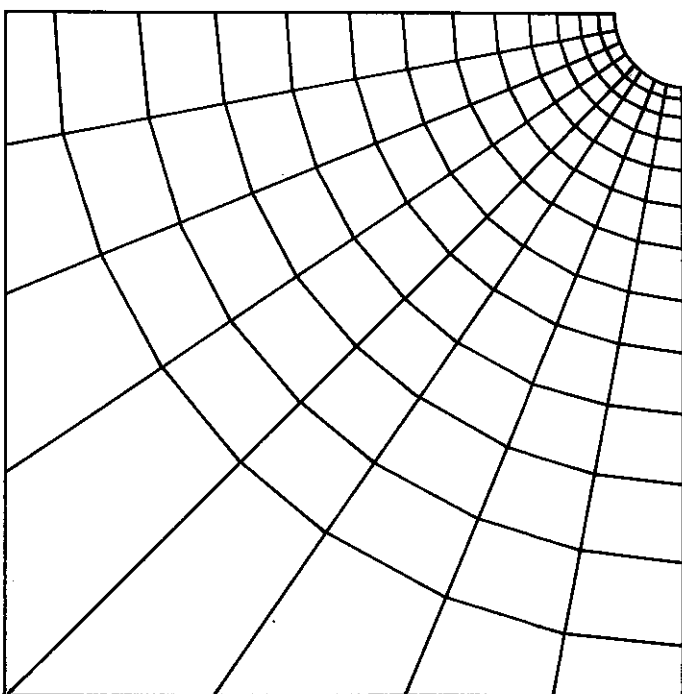
$$\mathcal{L} = 11, 25^\circ$$

$$\alpha = 1/50$$



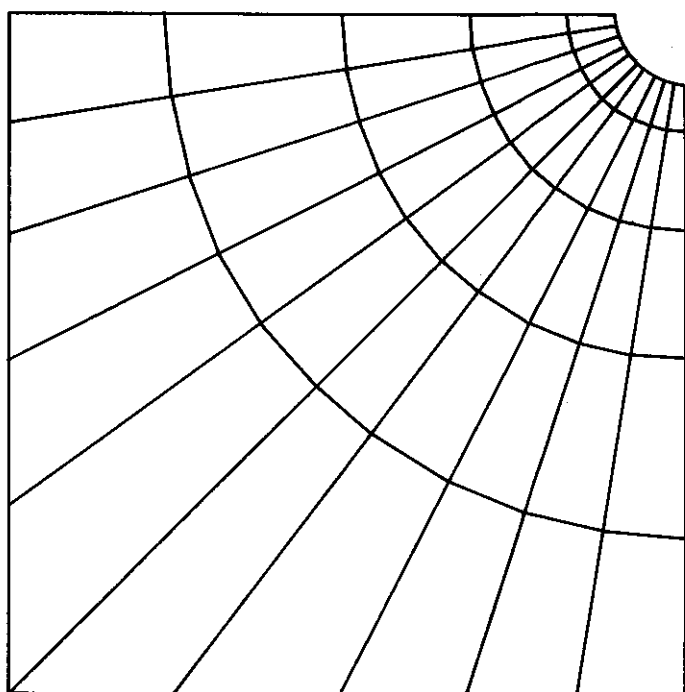
$\mathcal{L} = 9^\circ$

$\alpha = 1/8$



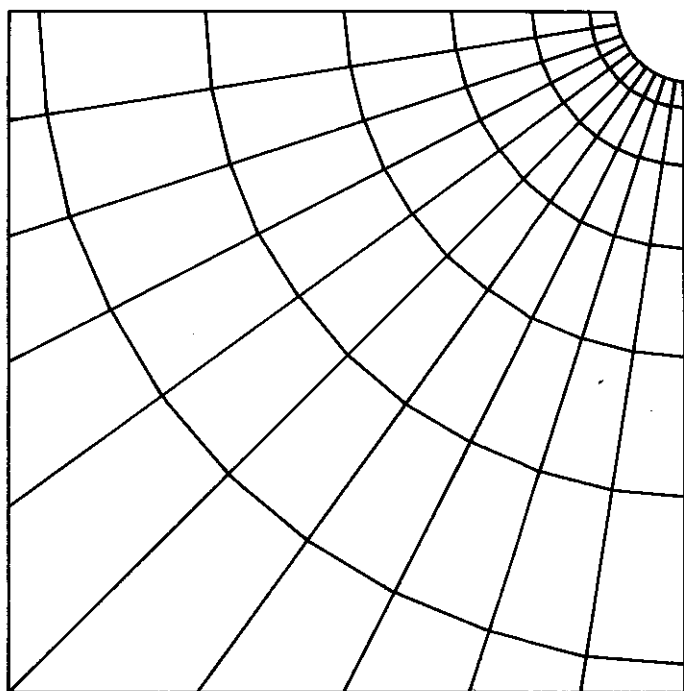
$\mathcal{L} = 11,25^\circ$

$\alpha = 1/100$



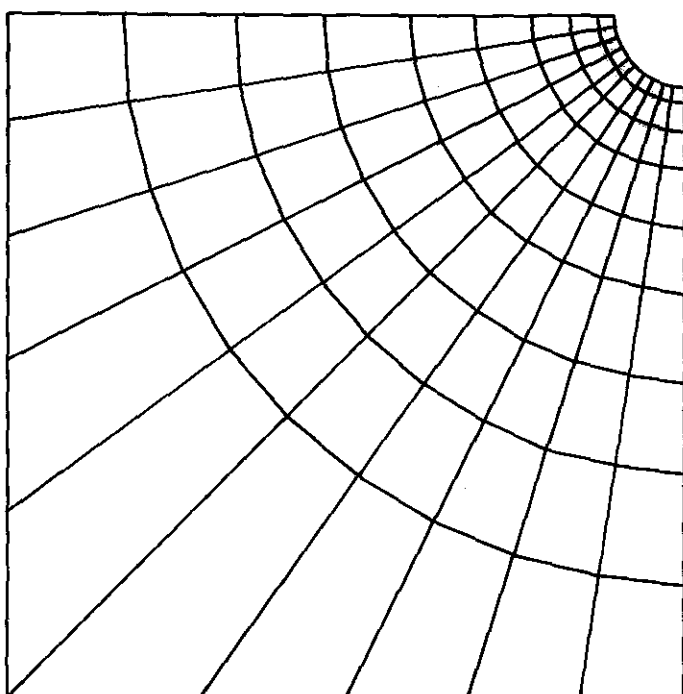
$$\mathcal{L} = 90^\circ$$

$$\alpha = 1/15$$



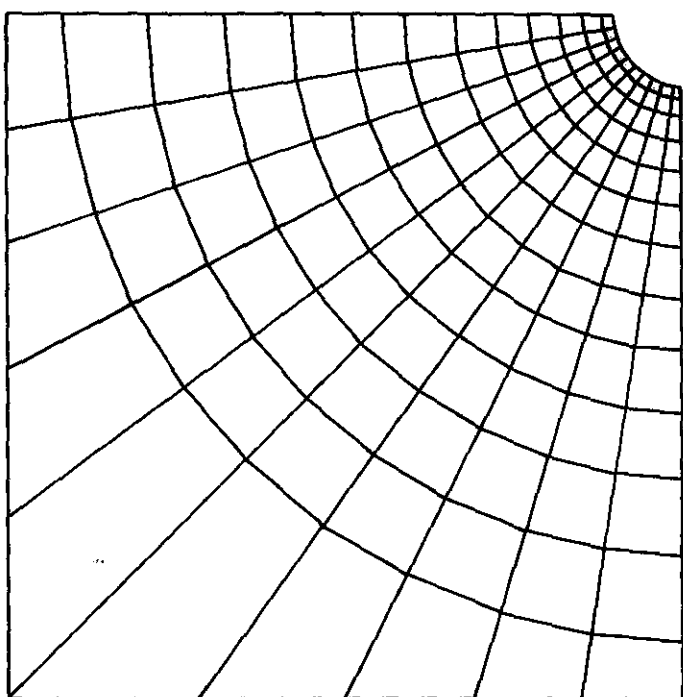
$$\mathcal{L} = 90^\circ$$

$$\alpha = 1/25$$



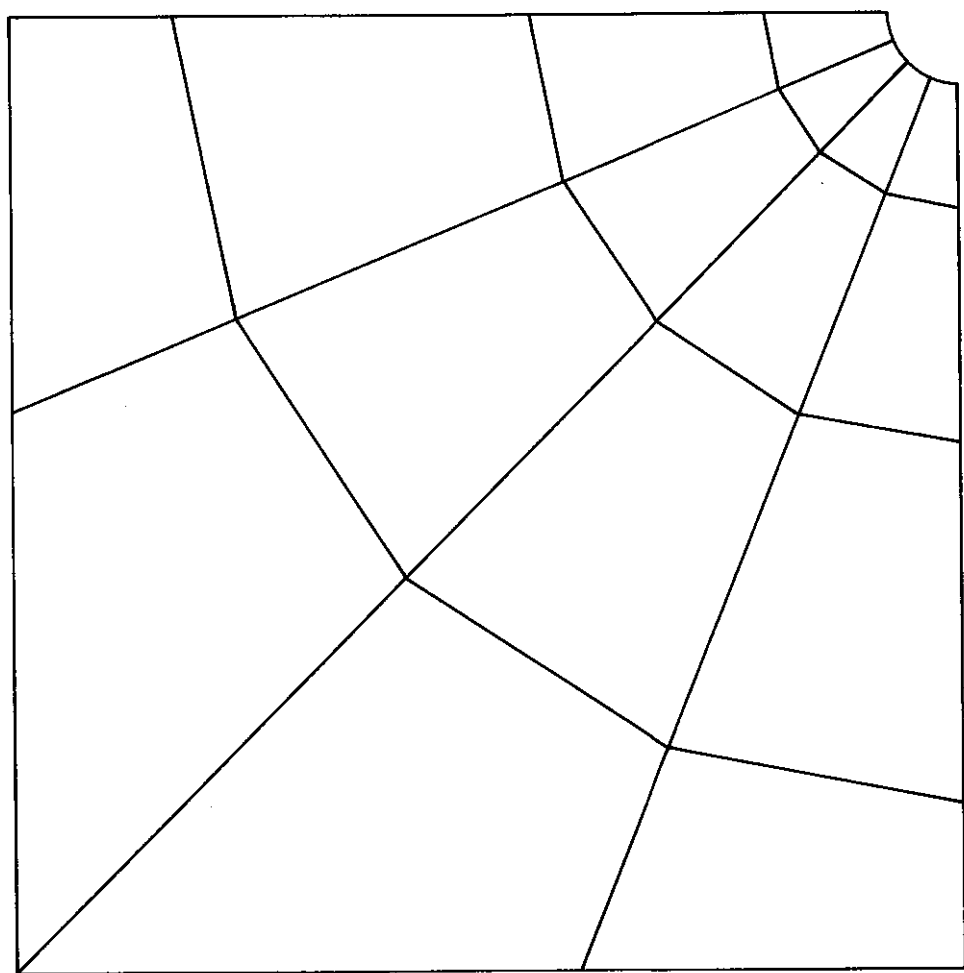
$$\mathcal{L} = 9^\circ$$

$$\alpha = 1/50$$



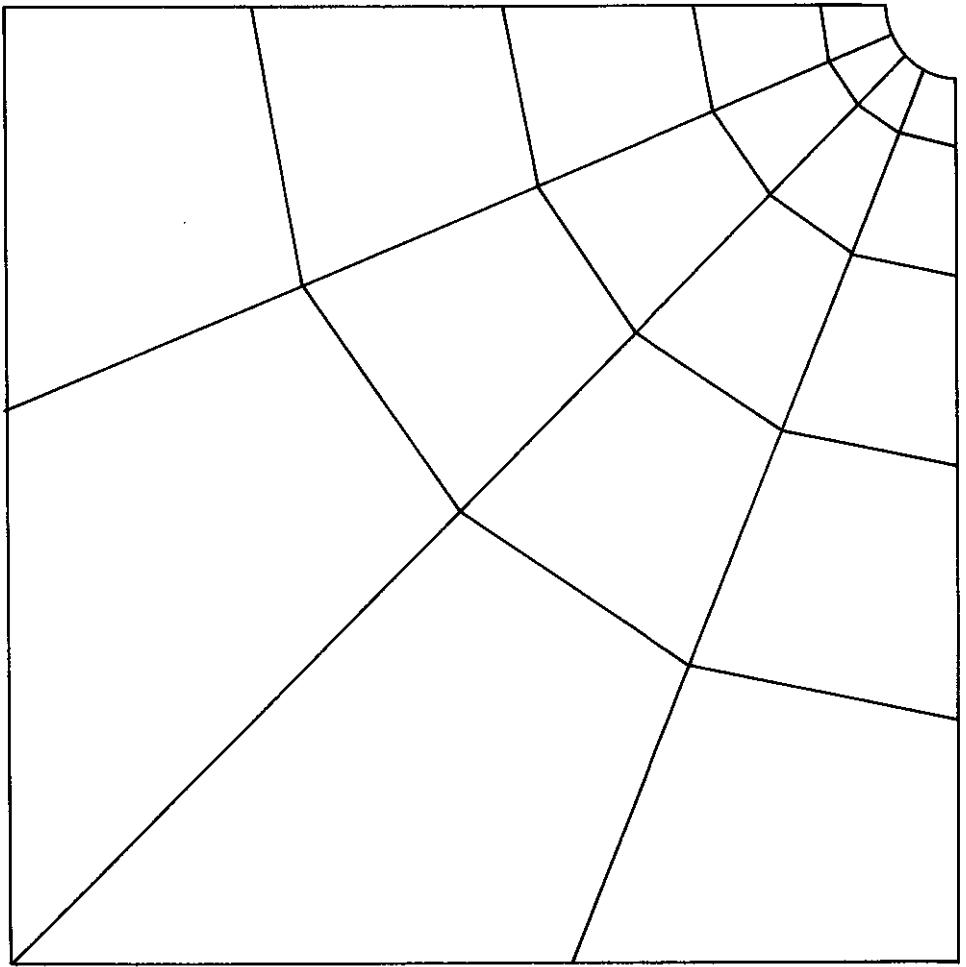
$$\mathcal{L} = 9^\circ$$

$$\alpha = 1/100$$



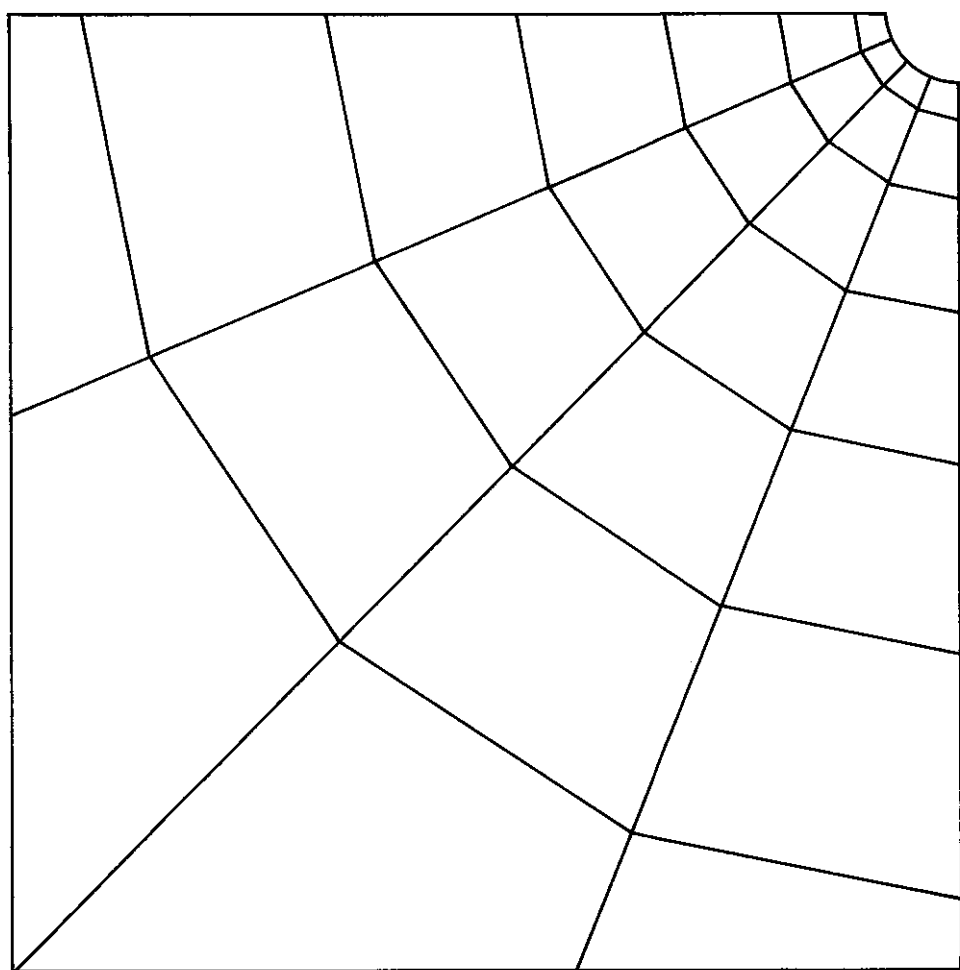
$$\alpha = 22,5^\circ$$

$$a = 1/8$$



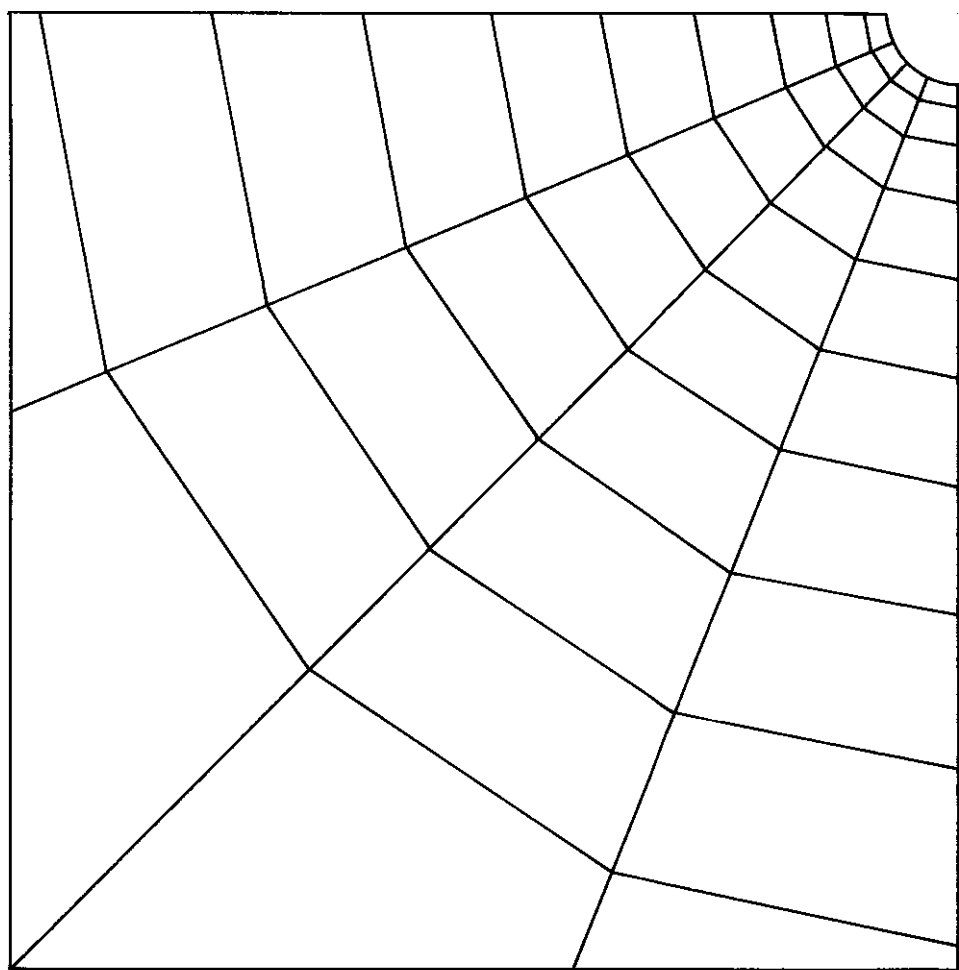
$$\alpha = 22,5^\circ$$

$$a = 1/15$$



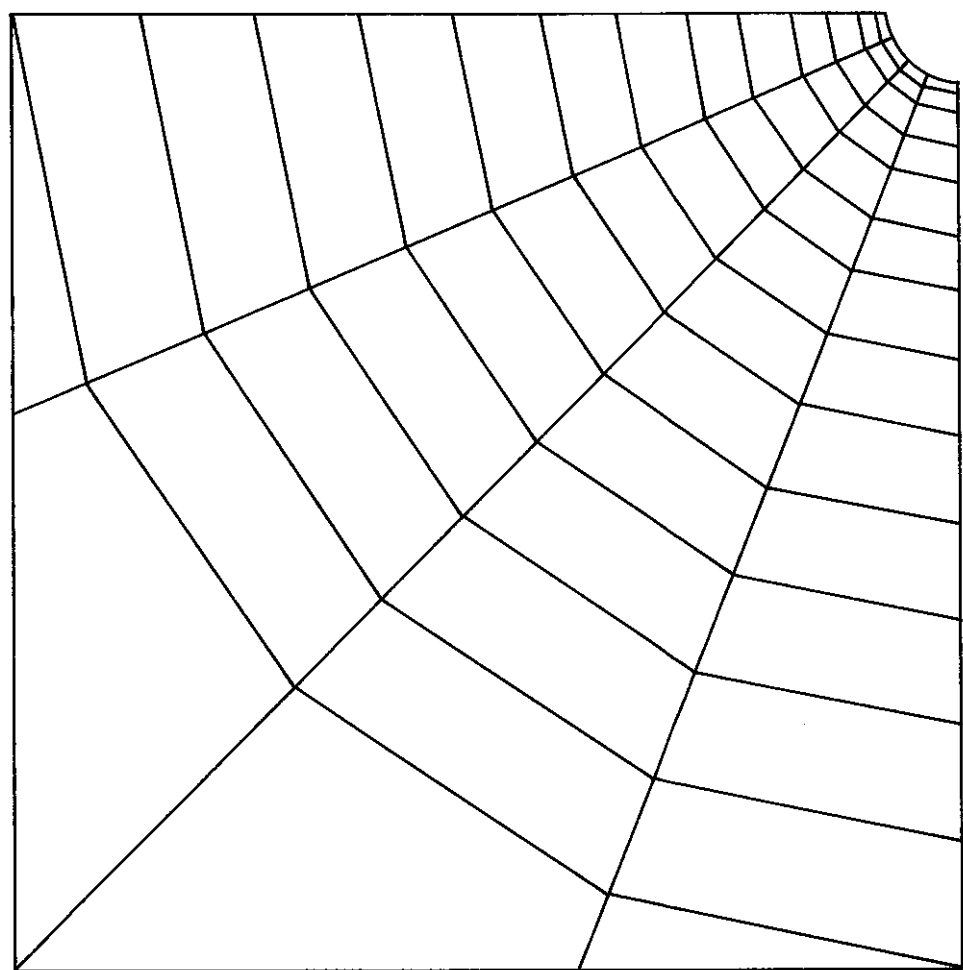
$$\mathcal{L} = 22,5^\circ$$

$$a = 1/25$$



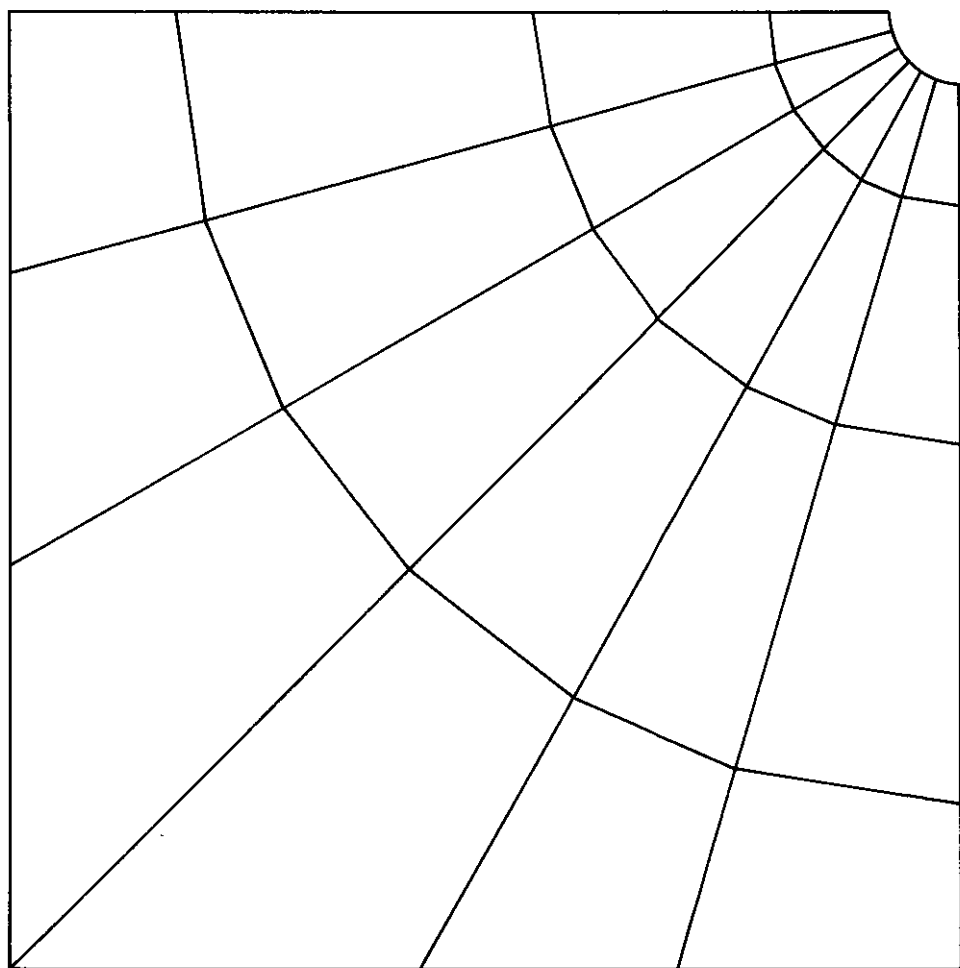
$\alpha = 22,5^\circ$

$\alpha = 1/50$



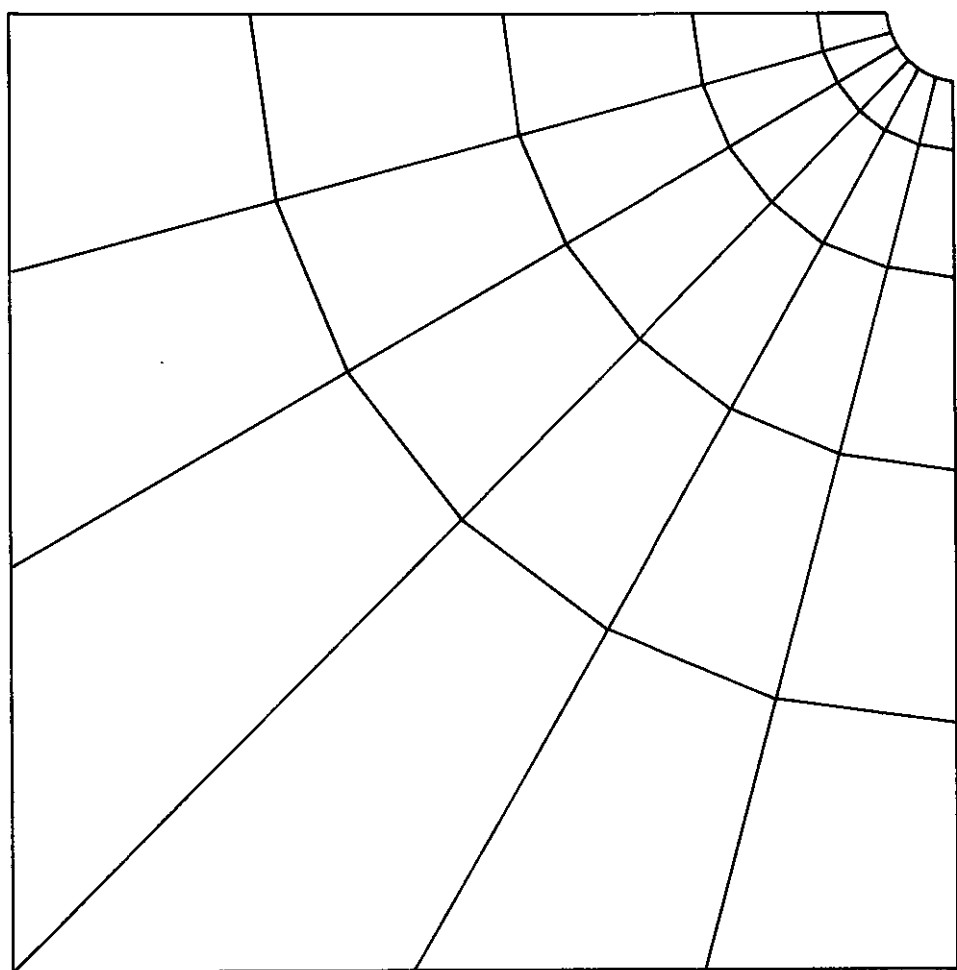
$$\alpha = 22,5^\circ$$

$$a = 1/100$$



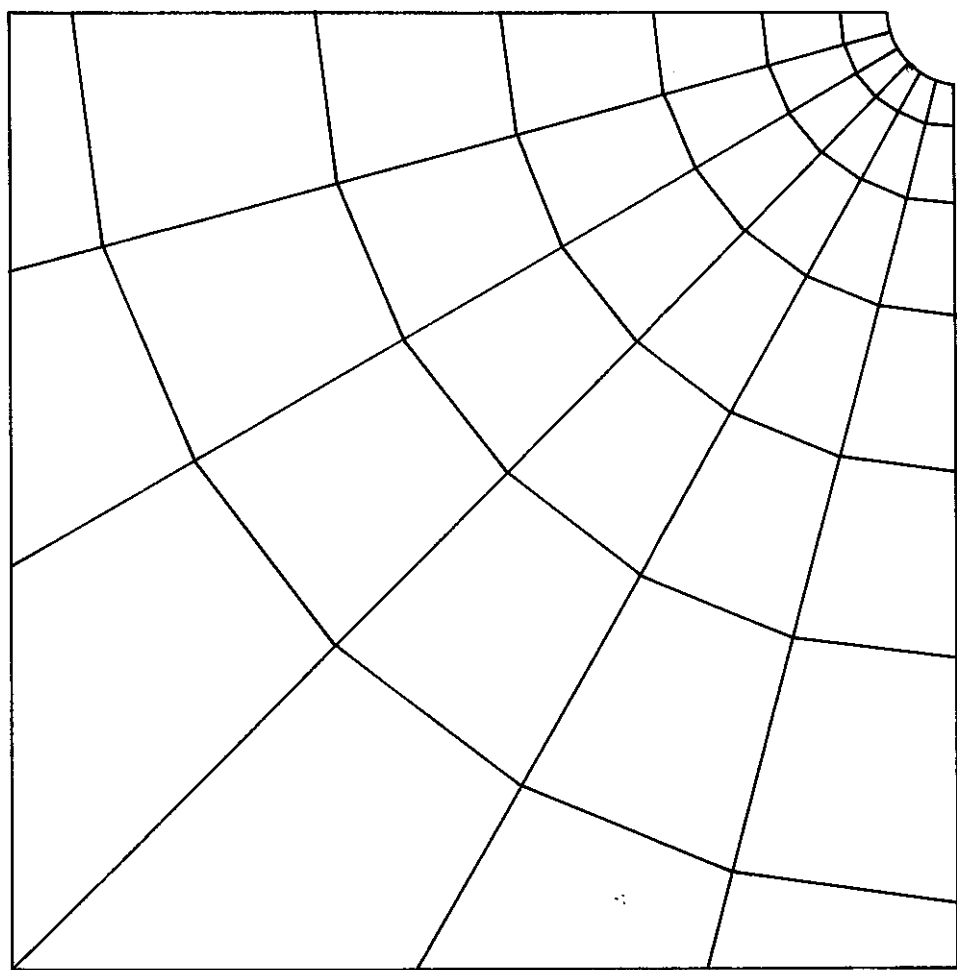
$$L = 15^\circ$$

$$a = 1/8$$



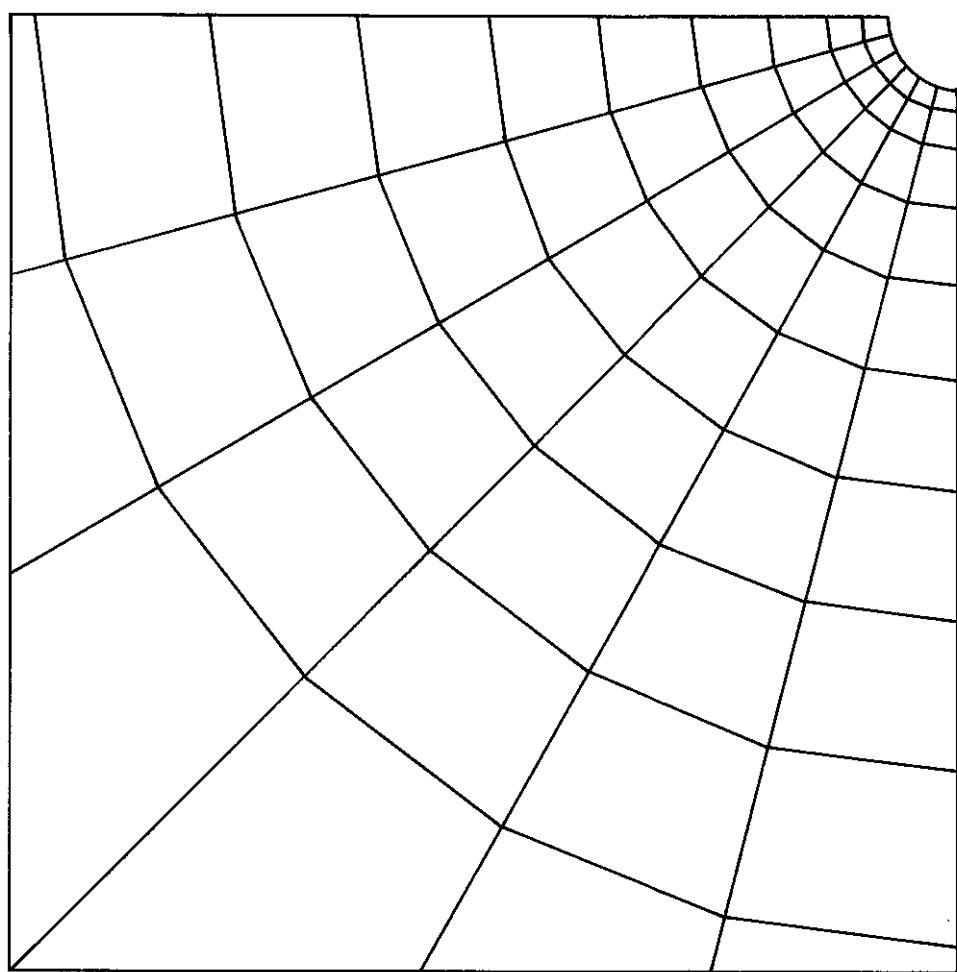
$$\alpha = 15^\circ$$

$$a = 1/15$$



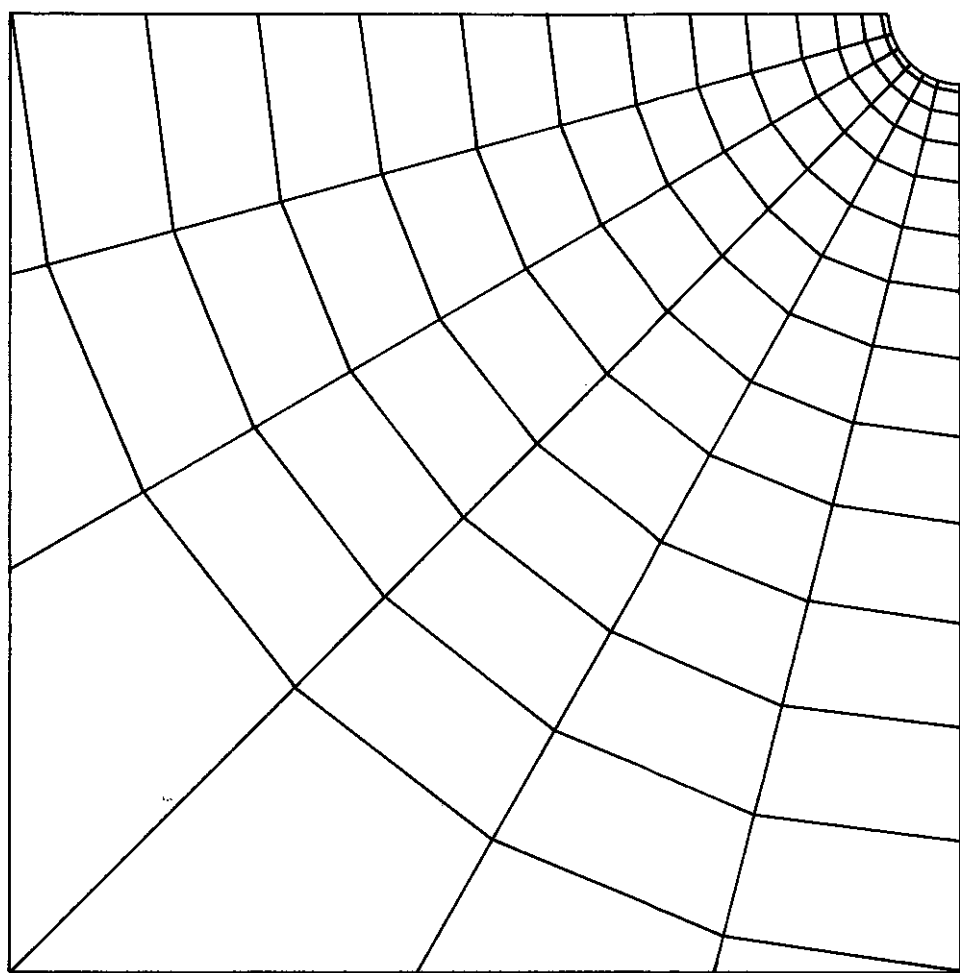
$$\alpha = 15^\circ$$

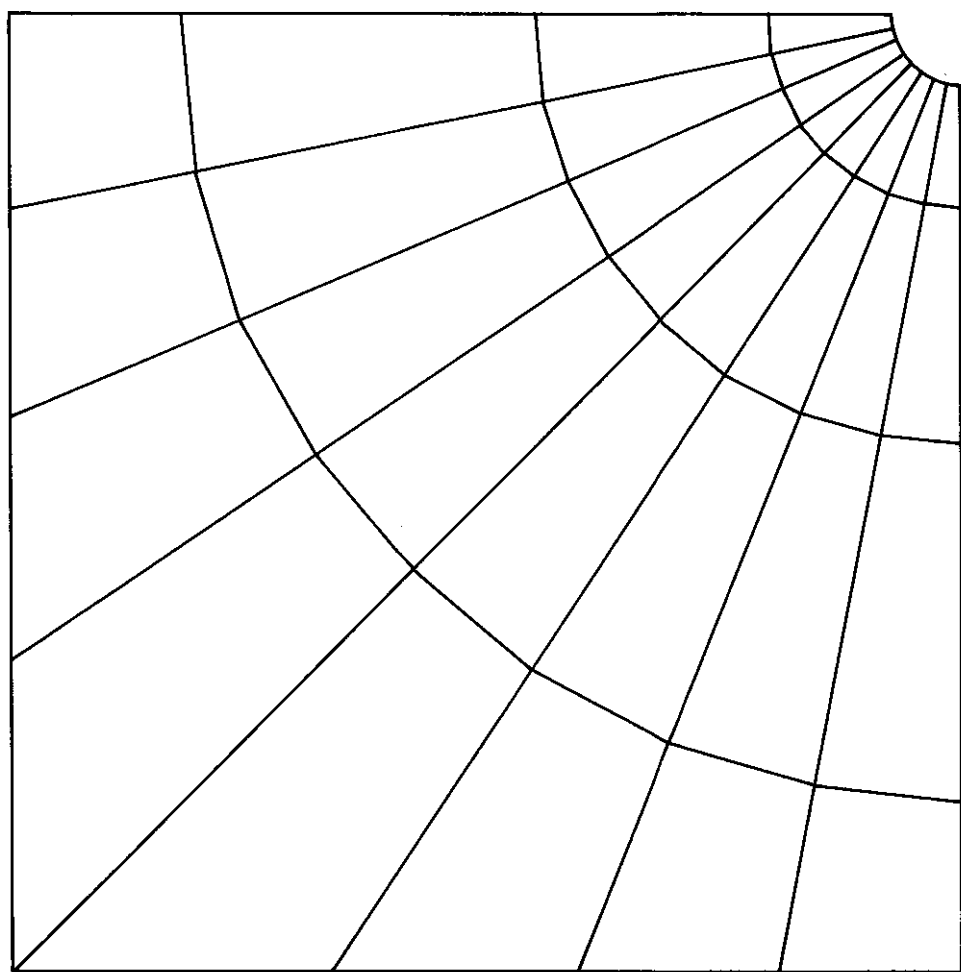
$$a = 1/25$$



$$\mathcal{L} = 15^\circ$$

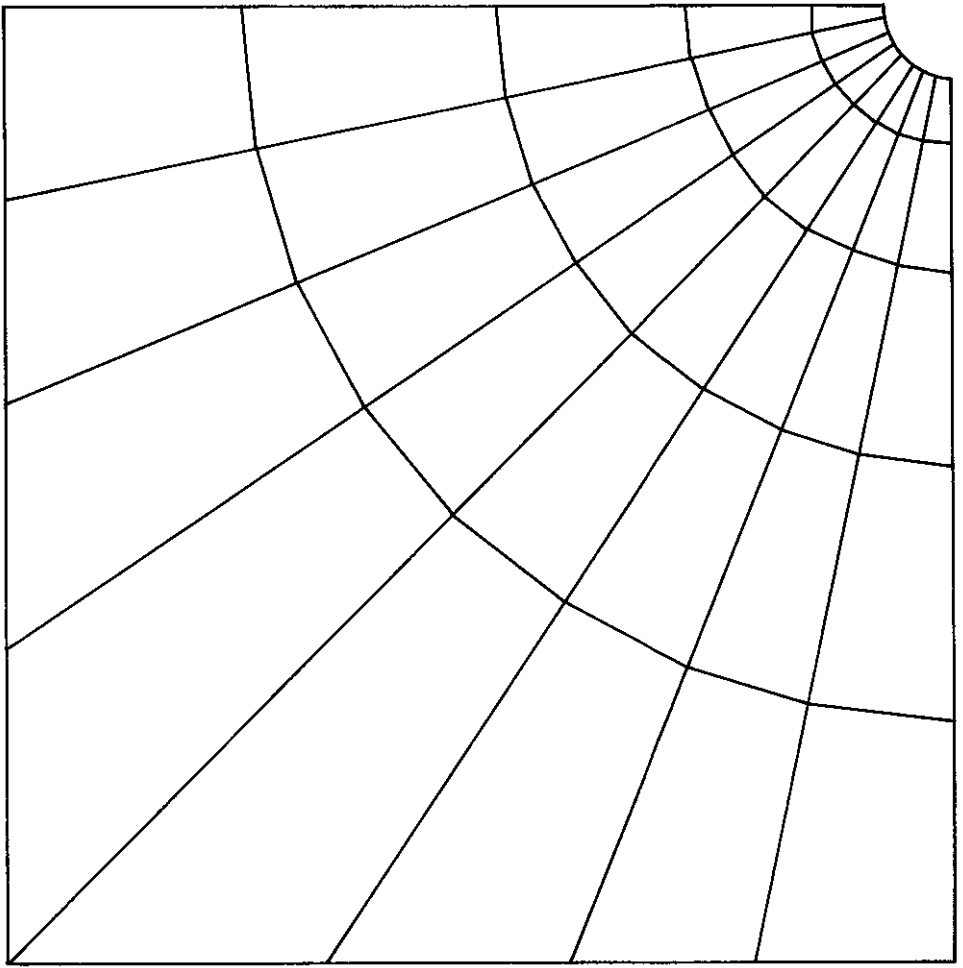
$$a = 1/50$$

 $\alpha = 15^\circ$ $\alpha = 1/100$



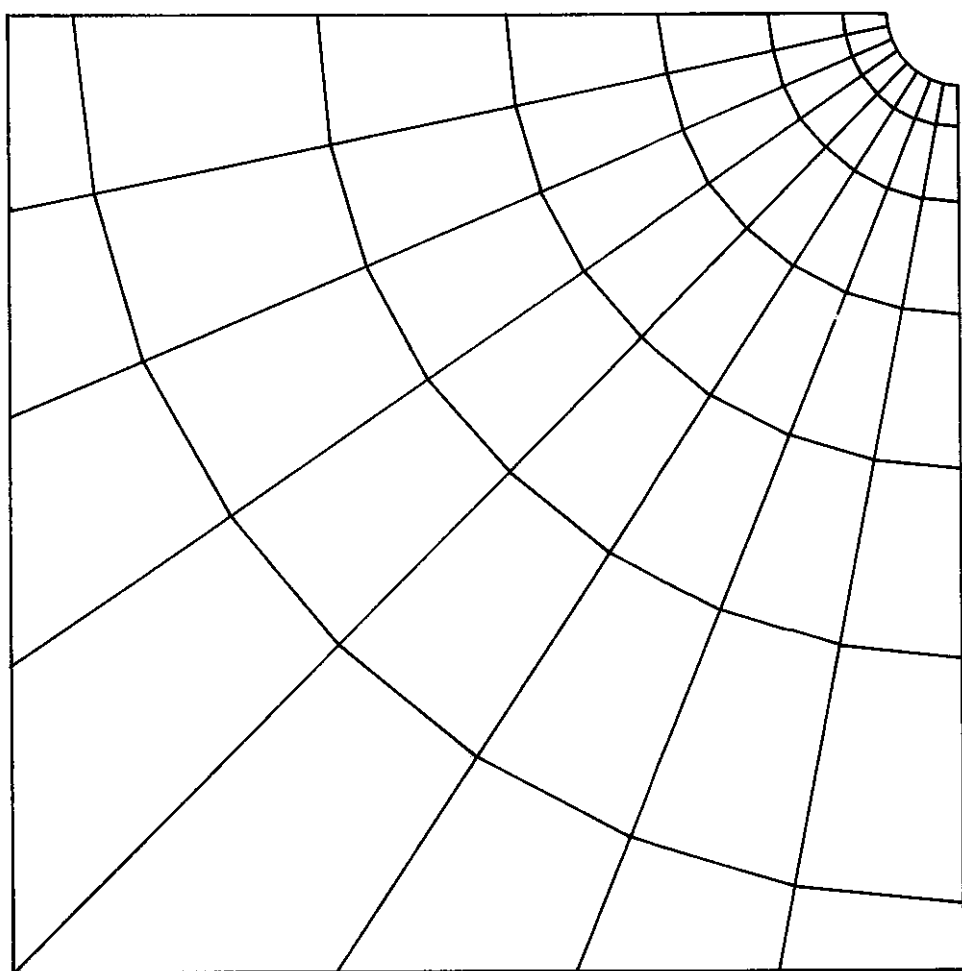
$$\alpha = 11,25^\circ$$

$$a = 1/8$$



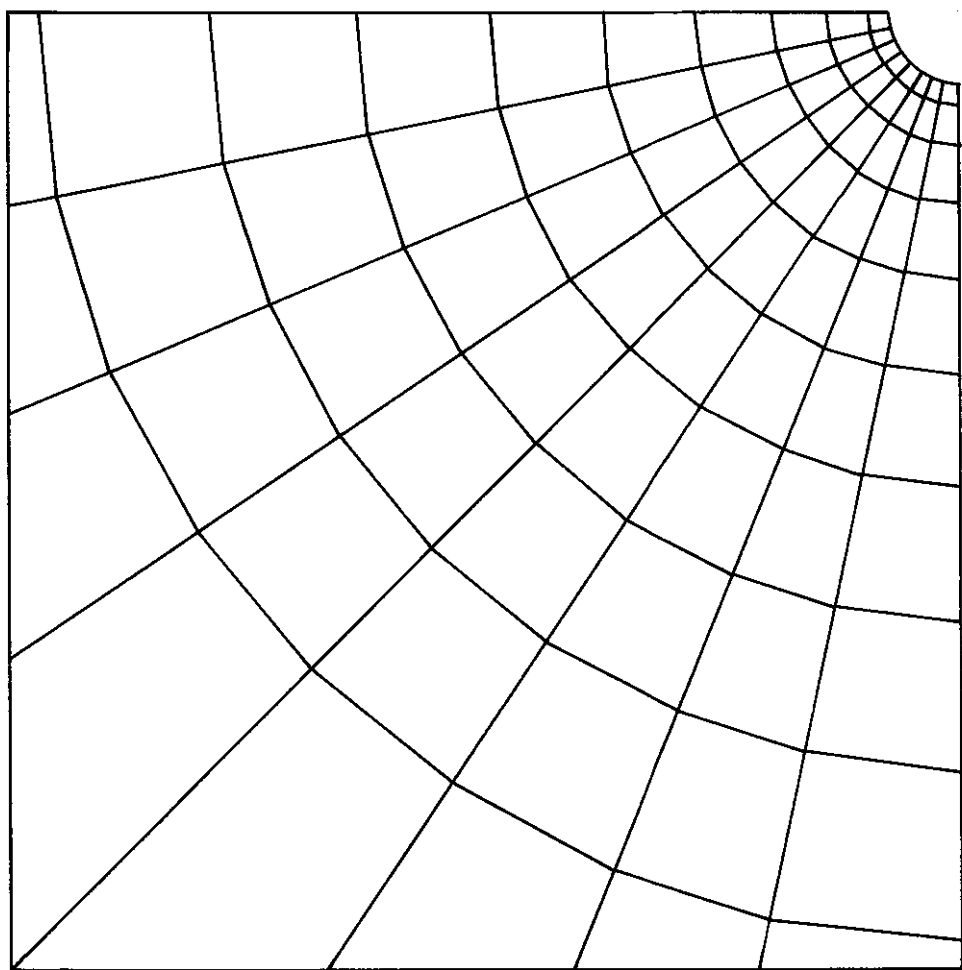
$$\alpha = 11,25^\circ$$

$$a = 1/15$$



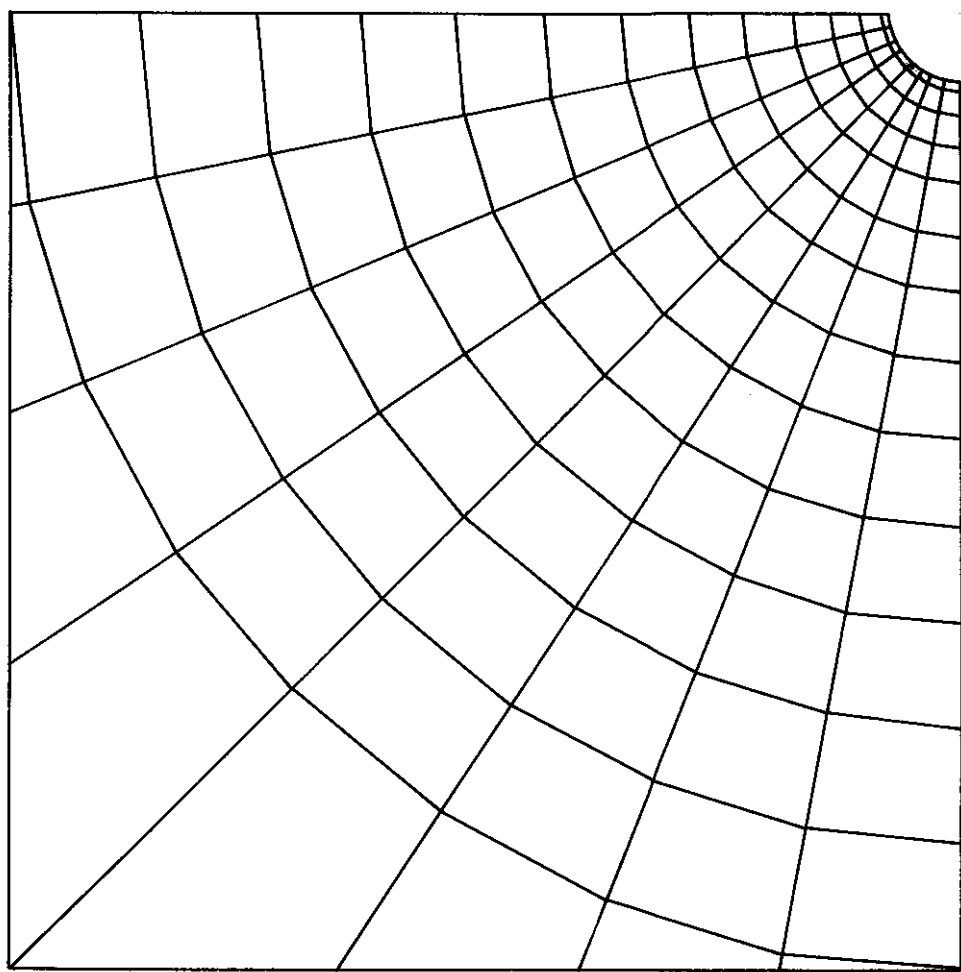
$$\varphi = 11,25^\circ$$

$$a = 1/25$$



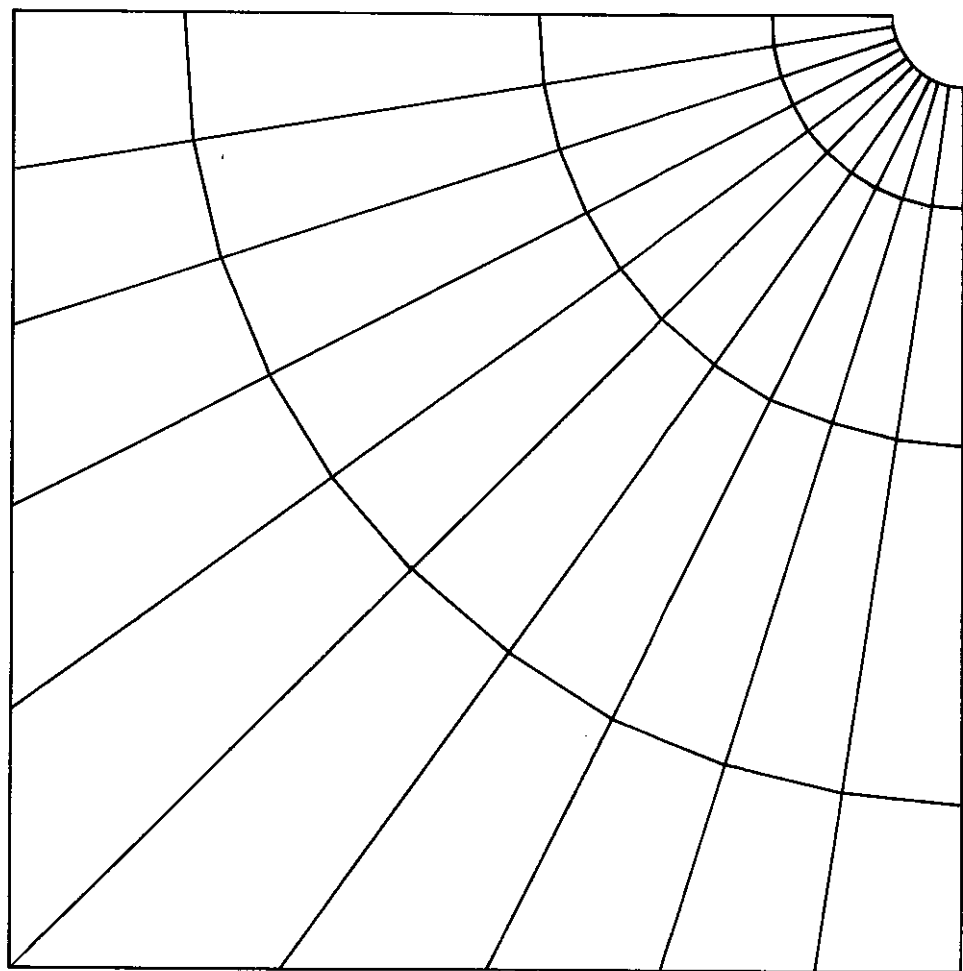
$$\alpha = 11, 25^\circ$$

$$a = 1 / 50$$



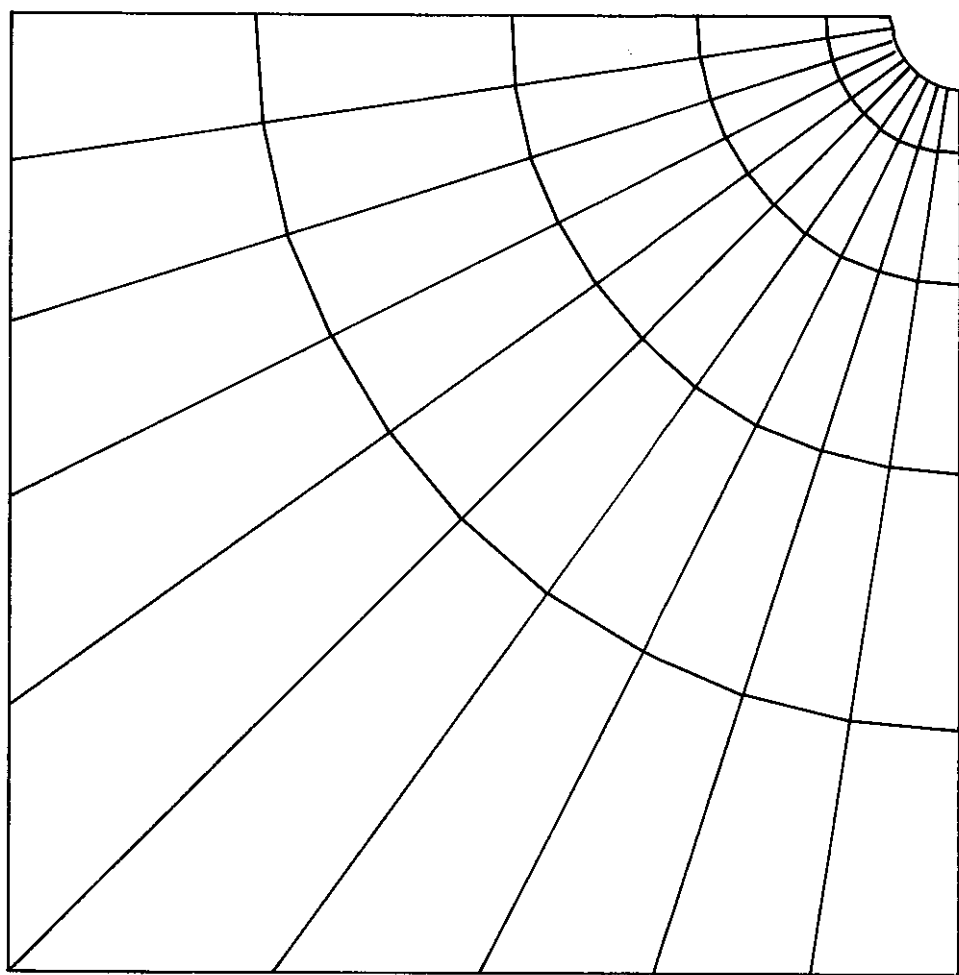
$$\mathcal{L} = 11, 25^\circ$$

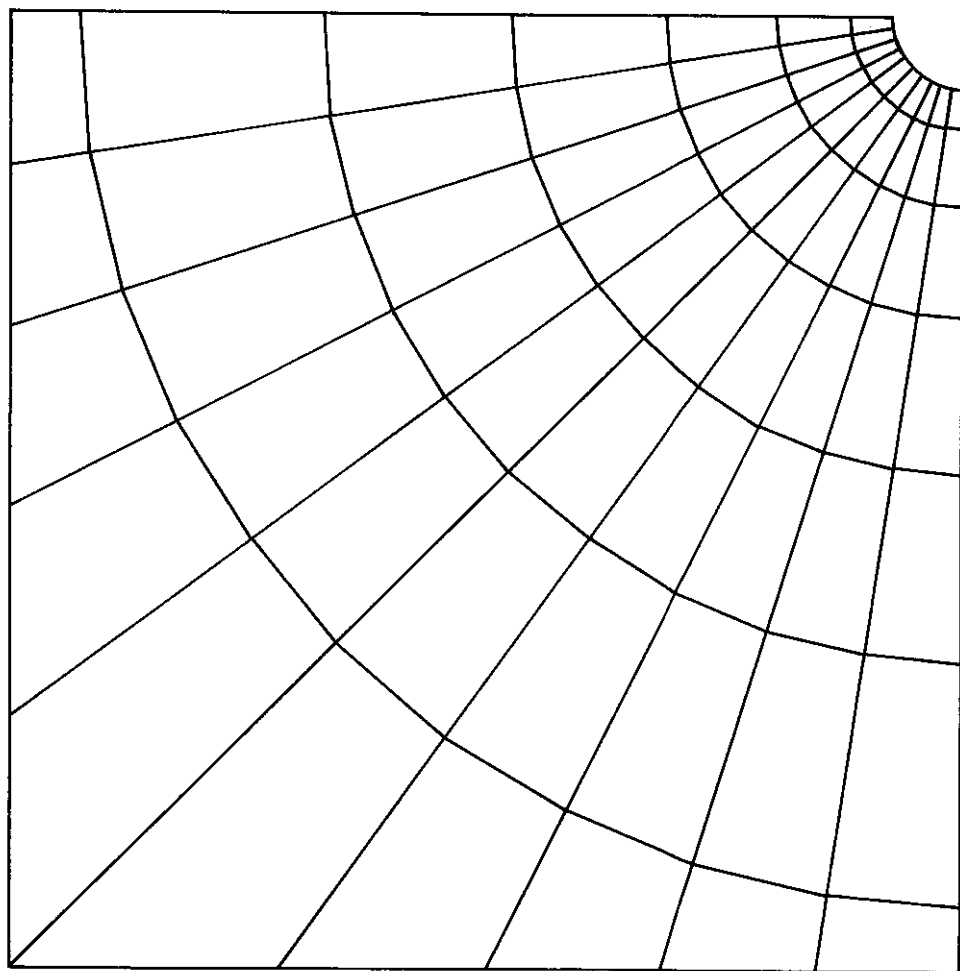
$$a = 1/100$$



$\alpha = 90^\circ$

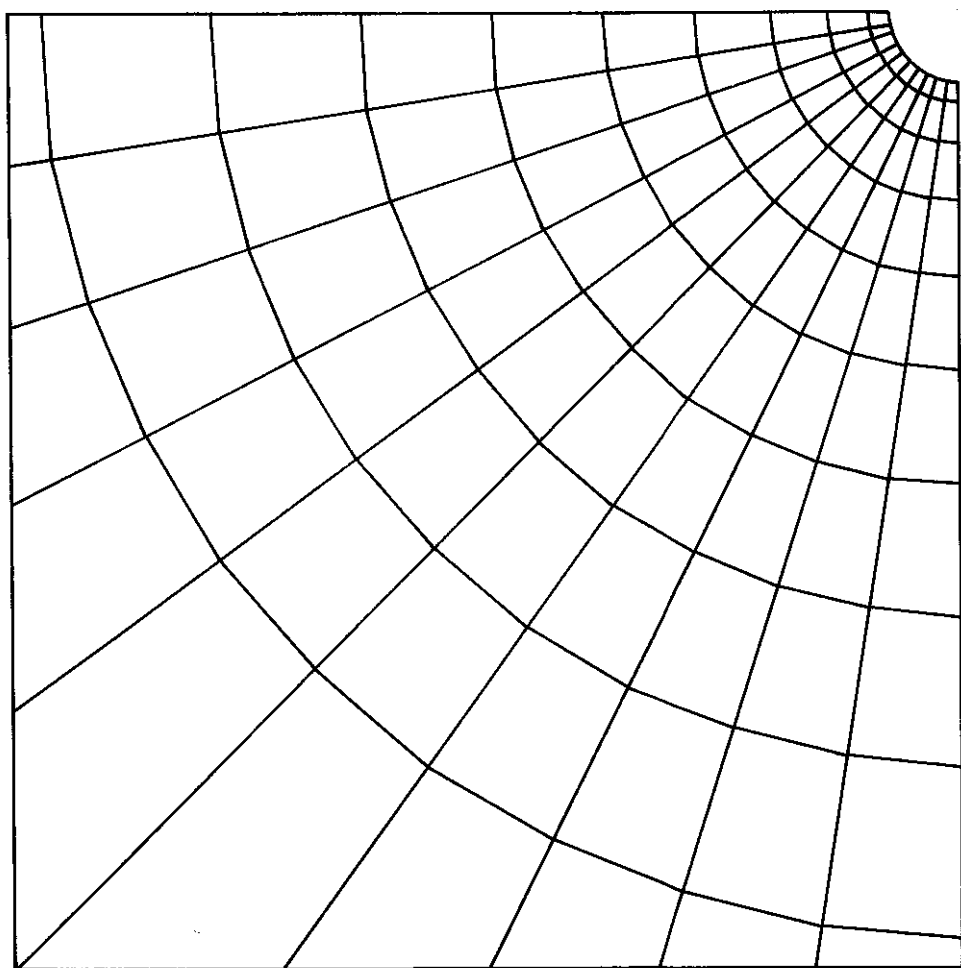
$a = 1/8$

 $L = 9^\circ$ $a = 1/15$



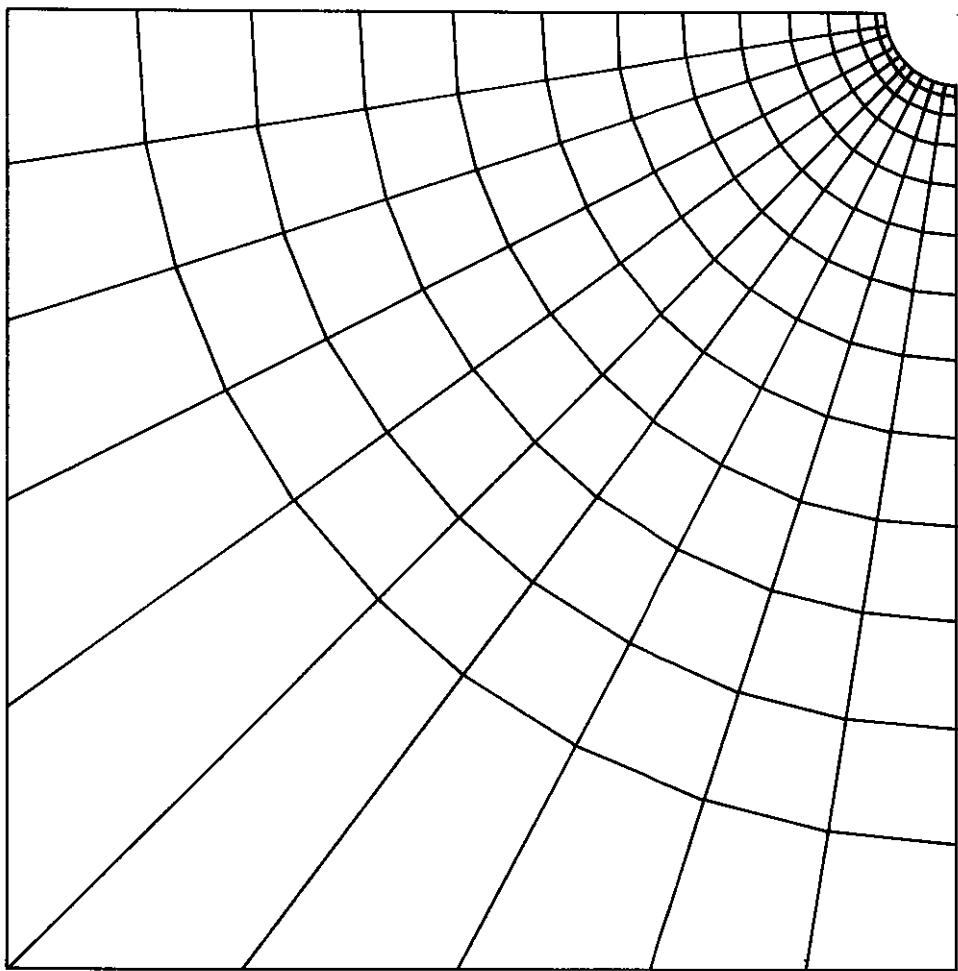
$$\mathcal{L} = 9^\circ$$

$$\alpha = 1/25$$



$$\mathcal{L} = 9^\circ$$

$$\alpha = 1/50$$



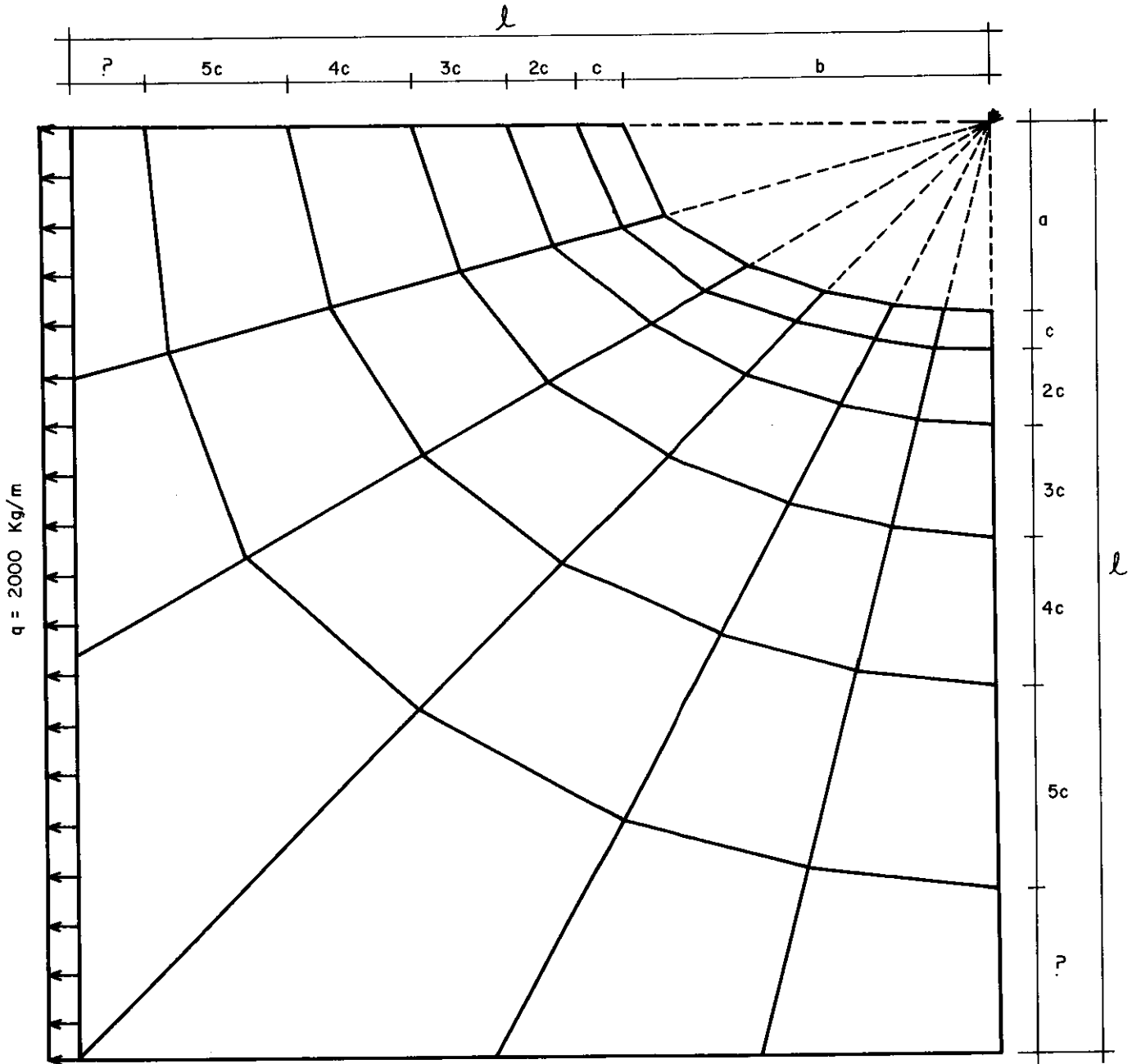
$$\phi = 90^\circ$$

$$\alpha = 1/100$$

	$c = 1/8$	$c = 1/15$	$c = 1/25$	$c = 1/50$	$c = 1/100$
α	$r/l = 1/6 \quad r = 0,30 \text{ m}$ $l = 1,80 \text{ m}$				
9.00^0	$596,7 \times 10^3$	$637,6 \times 10^3$	$646,9 \times 10^3$	$649,0 \times 10^3$	$645,9 \times 10^3$
11.25^0	$594,5 \times 10^3$	$634,5 \times 10^3$	$643,6 \times 10^3$	$645,3 \times 10^3$	$642,1 \times 10^3$
15.00^0	$589,6 \times 10^3$	$628,0 \times 10^3$	$636,4 \times 10^3$	$637,4 \times 10^3$	$634,0 \times 10^3$
22.50^0	$577,5 \times 10^3$	$610,0 \times 10^3$	$616,3 \times 10^3$	$615,6 \times 10^3$	$611,7 \times 10^3$
α	$r/l = 1/10 \quad r = 0,30 \text{ m}$ $l = 3,00 \text{ m}$				
9.00^0	$527,2 \times 10^3$	$582,6 \times 10^3$	$607,5 \times 10^3$	$618,4 \times 10^3$	$617,7 \times 10^3$
11.25^0	$526,1 \times 10^3$	$580,6 \times 10^3$	$605,0 \times 10^3$	$615,4 \times 10^3$	$614,6 \times 10^3$
15.00^0	$523,7 \times 10^3$	$576,4 \times 10^3$	$599,6 \times 10^3$	$609,1 \times 10^3$	$607,8 \times 10^3$
$22,50^0$	$517,8 \times 10^3$	$564,6 \times 10^3$	$584,5 \times 10^3$	$591,4 \times 10^3$	$588,9 \times 10^3$
α	$r/l = 1/14 \quad r = 0,30 \text{ m}$ $l = 4,20 \text{ m}$				
9.00^0	$490,0 \times 10^3$	$549,7 \times 10^3$	$585,8 \times 10^3$	$607,9 \times 10^3$	$610,5 \times 10^3$
11.25^0	$489,4 \times 10^3$	$548,3 \times 10^3$	$583,7 \times 10^3$	$605,2 \times 10^3$	$607,6 \times 10^3$
15.00^0	$488,1 \times 10^3$	$545,3 \times 10^3$	$579,3 \times 10^3$	$599,5 \times 10^3$	$601,3 \times 10^3$
22.50^0	$484,9 \times 10^3$	$536,8 \times 10^3$	$566,8 \times 10^3$	$583,6 \times 10^3$	$583,7 \times 10^3$

TENSÕES MÁXIMAS PARA CHAPA COM FURO CIRCULAR

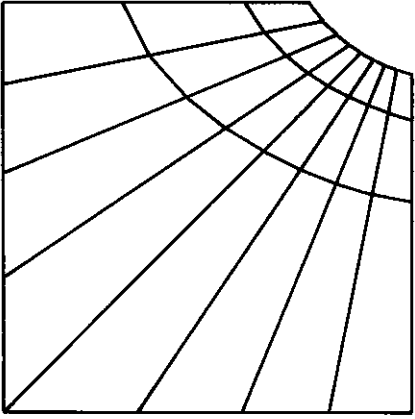
TAB. (IV.1)



MALHA PADRÃO - FURO ELIPTICO

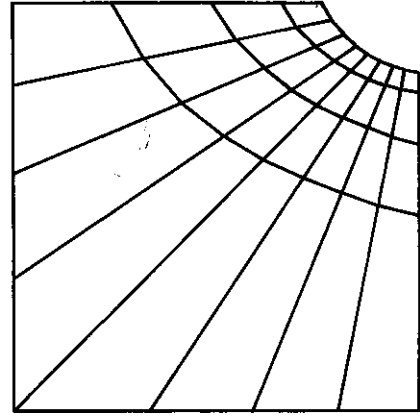
FIG. (IV.4)

Seguem-se as 108 malhas analisadas para o furo elíptico



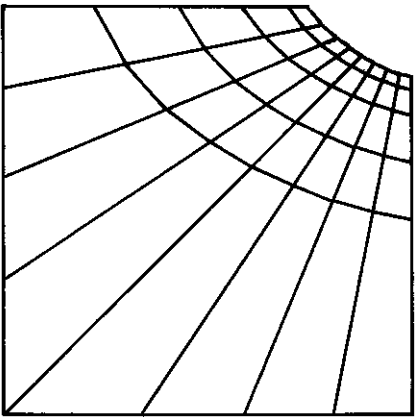
$$\alpha = 11,25^\circ$$

$$c = 1/8$$



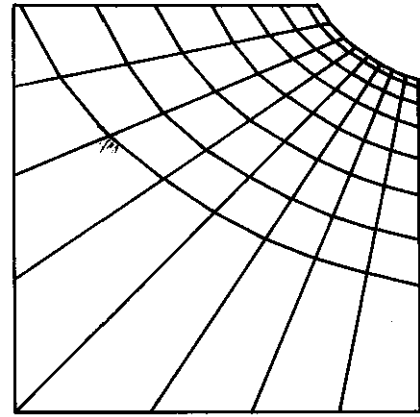
$$\alpha = 11,25^\circ$$

$$c = 1/15$$



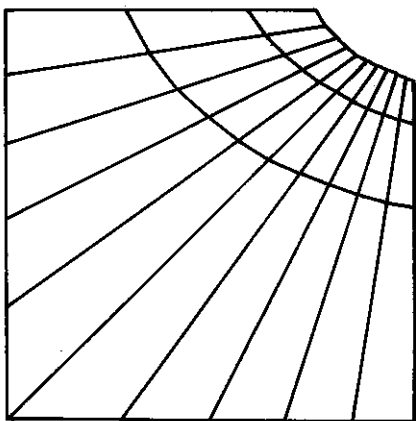
$$\alpha = 11,25^\circ$$

$$c = 1/25$$



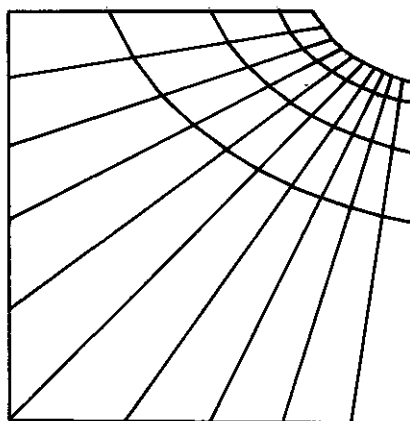
$$\alpha = 11,25^\circ$$

$$c = 1/50$$



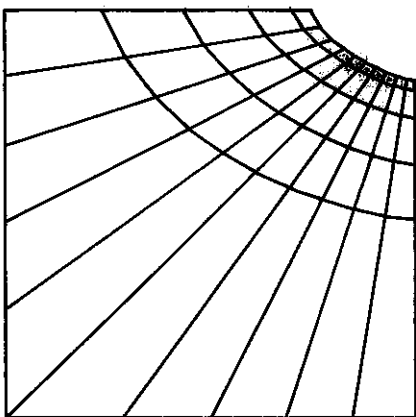
$\mathcal{L} = 9^\circ$

$c = 1/8$



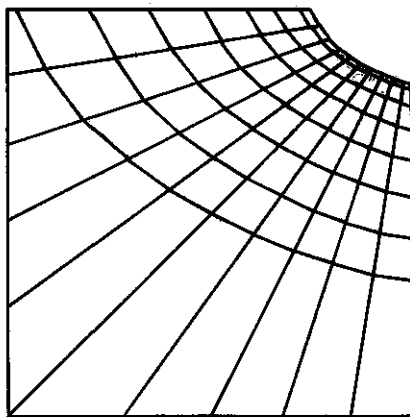
$\mathcal{L} = 9^\circ$

$c = 1/15$



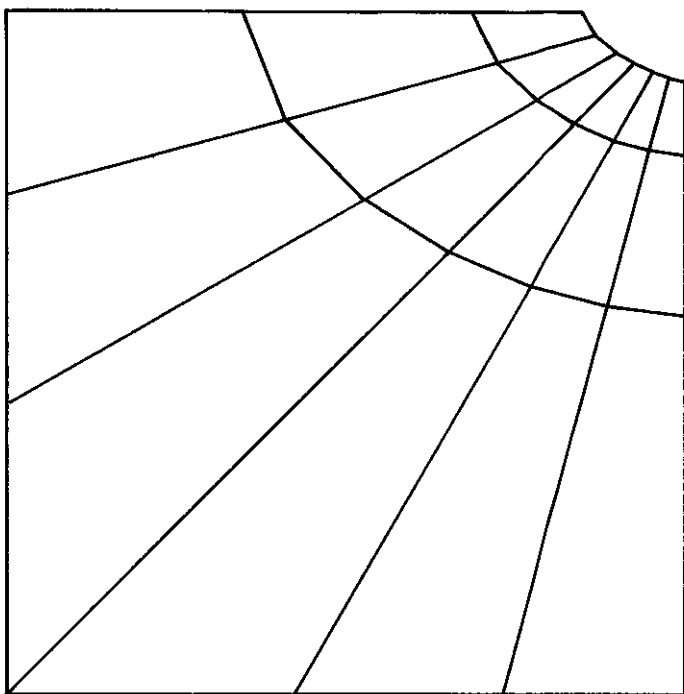
$\mathcal{L} = 9^\circ$

$c = 1/25$



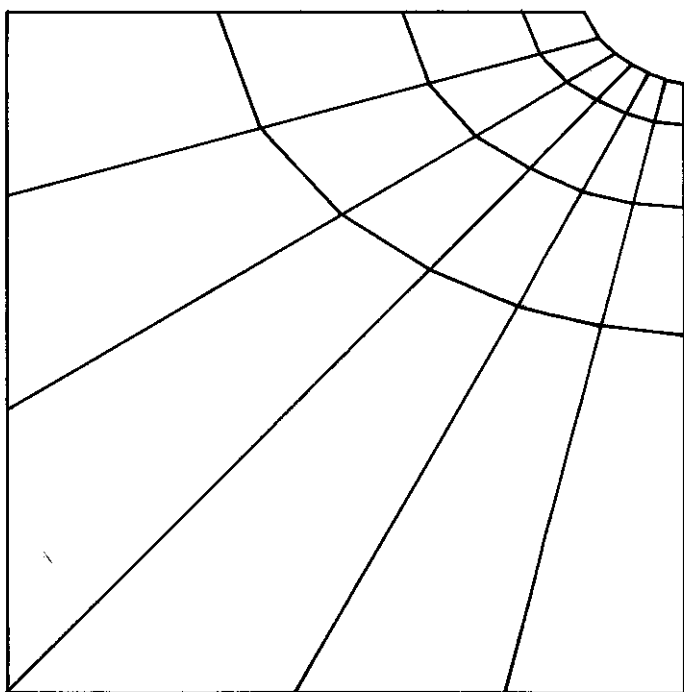
$\mathcal{L} = 9^\circ$

$c = 1/50$



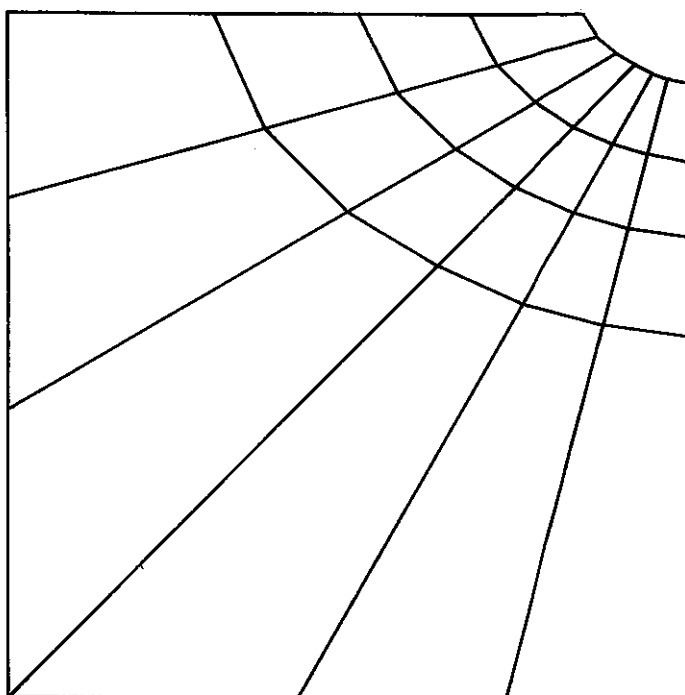
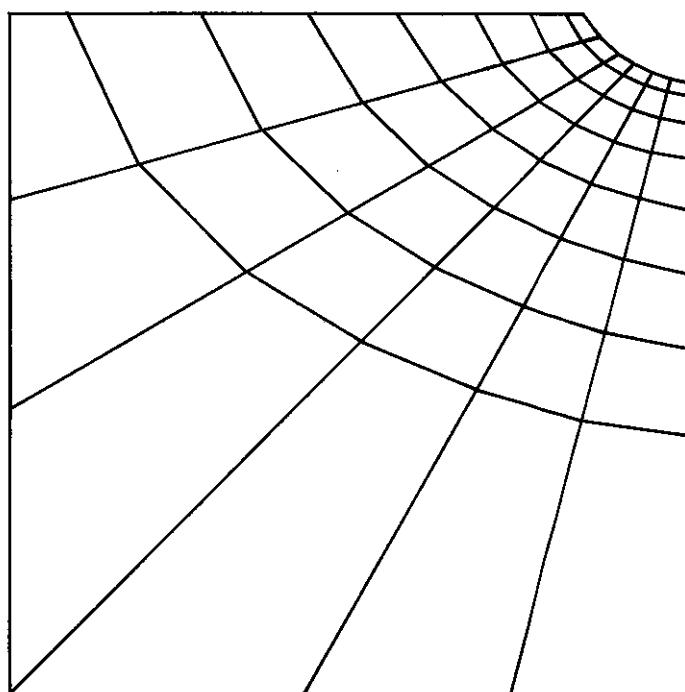
$$\mathcal{L} = 15^\circ$$

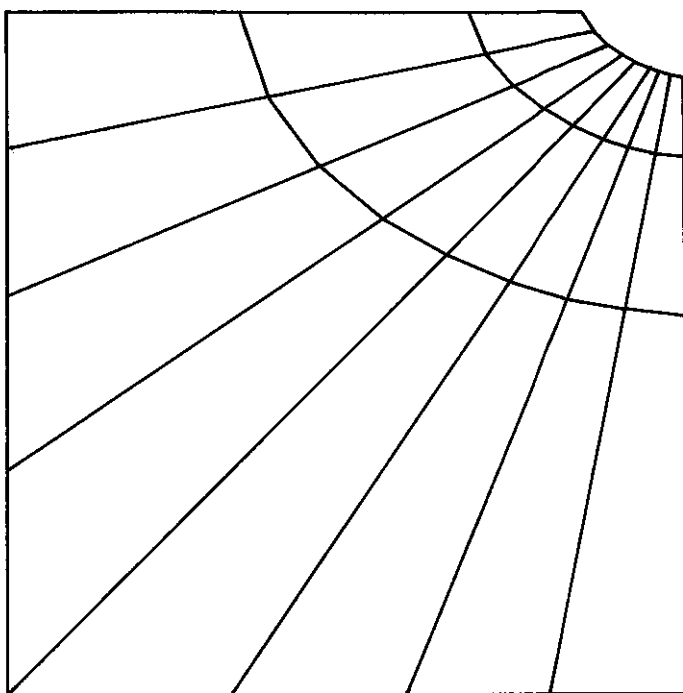
$$c = 1/8$$



$$\mathcal{L} = 15^\circ$$

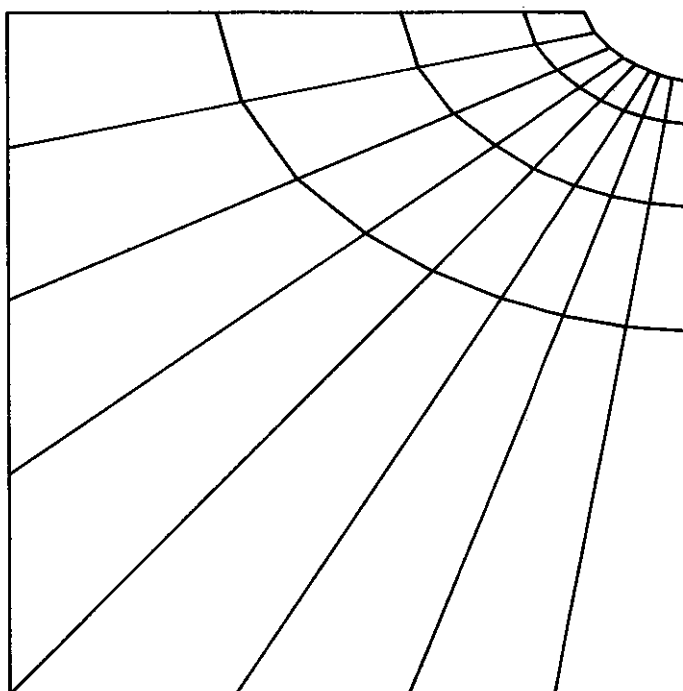
$$c = 1/15$$


 $\mathcal{L} = 15^\circ$
 $c = 1/25$

 $\mathcal{L} = 15^\circ$
 $c = 1/50$



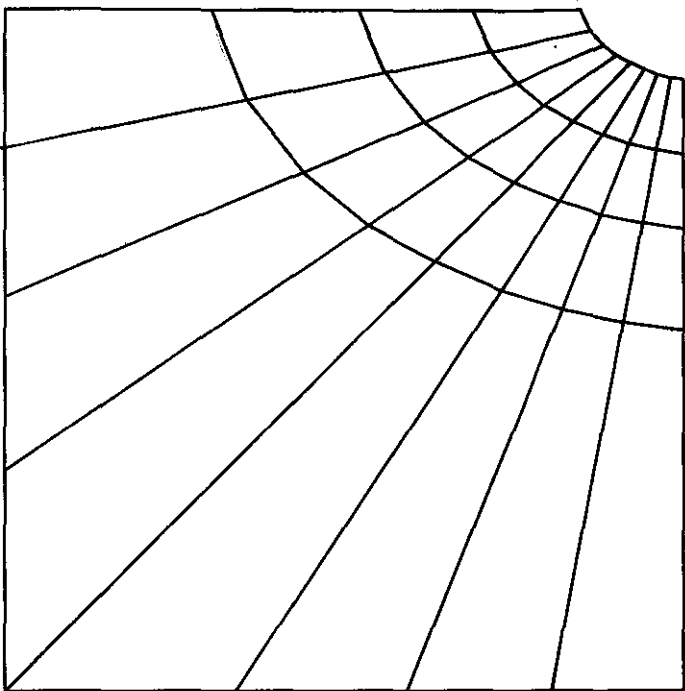
$$\alpha = 11,25^\circ$$

$$c = 1/8$$



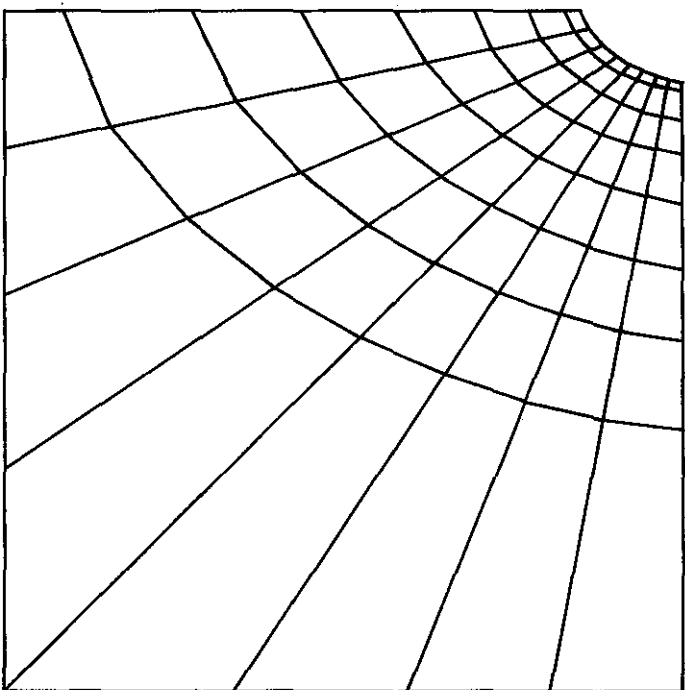
$$\alpha = 11,25^\circ$$

$$c = 1/15$$



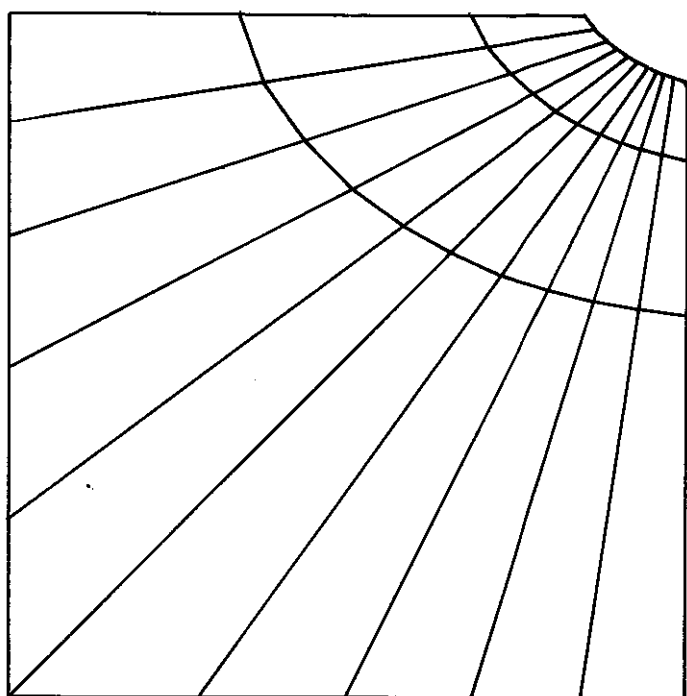
$$\alpha = 11,25^\circ$$

$$c' = 1/25$$



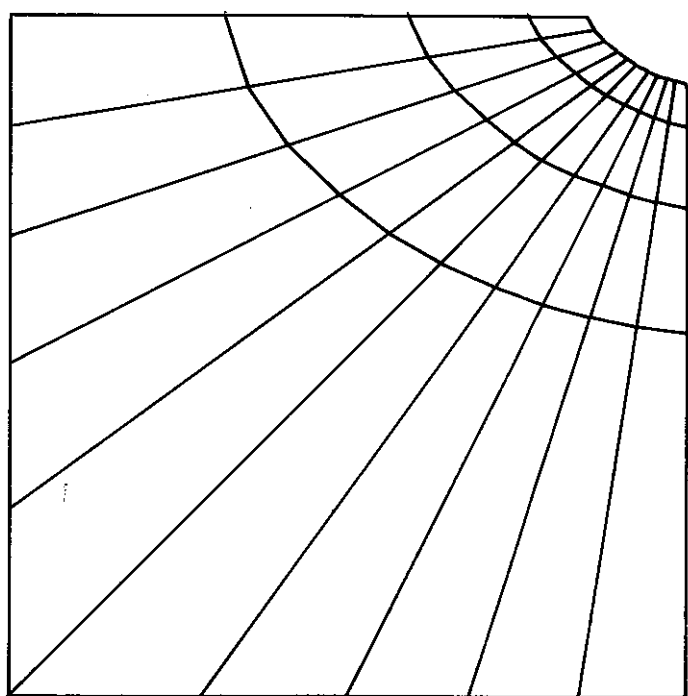
$$\alpha = 11,25^\circ$$

$$c = 1/50$$



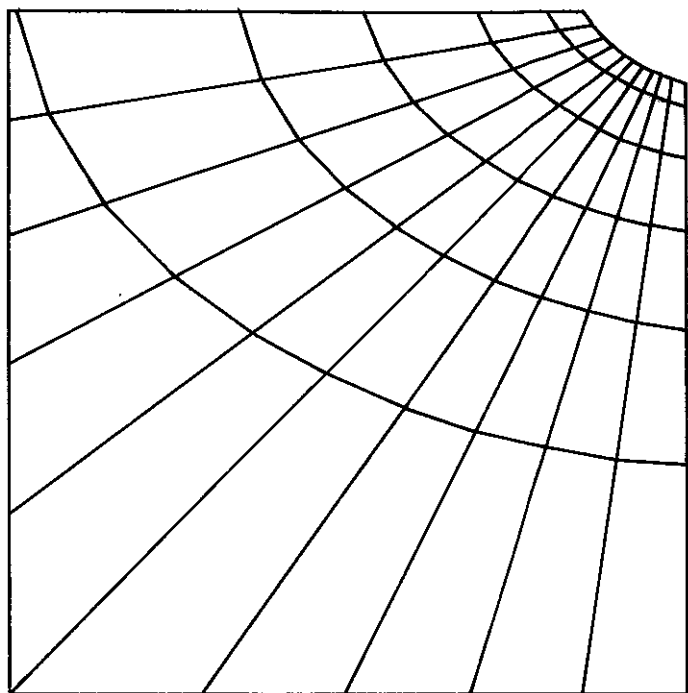
$\alpha = 9^\circ$

$c = 1/8$



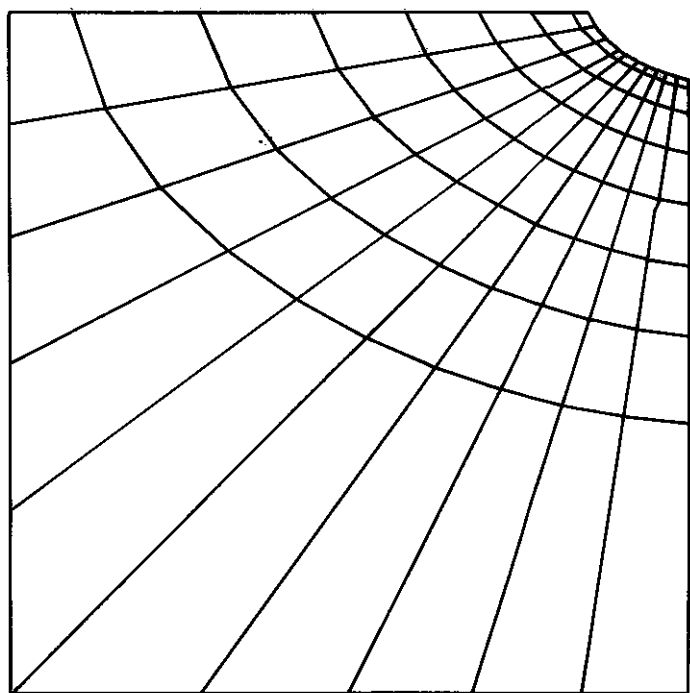
$\alpha = 9^\circ$

$c = 1/15$



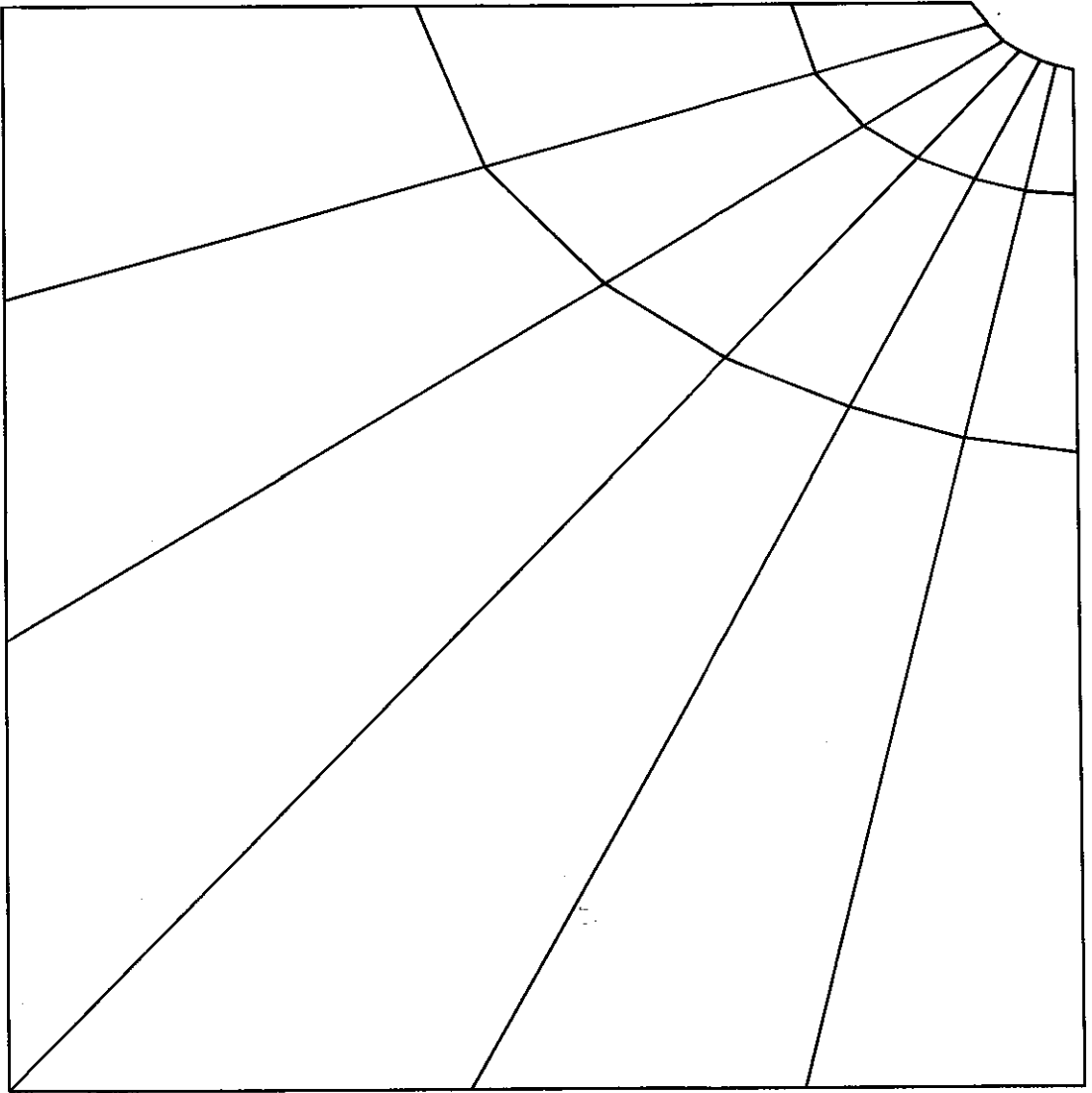
$$\mathcal{L} = 9^\circ$$

$$c = 1/25$$



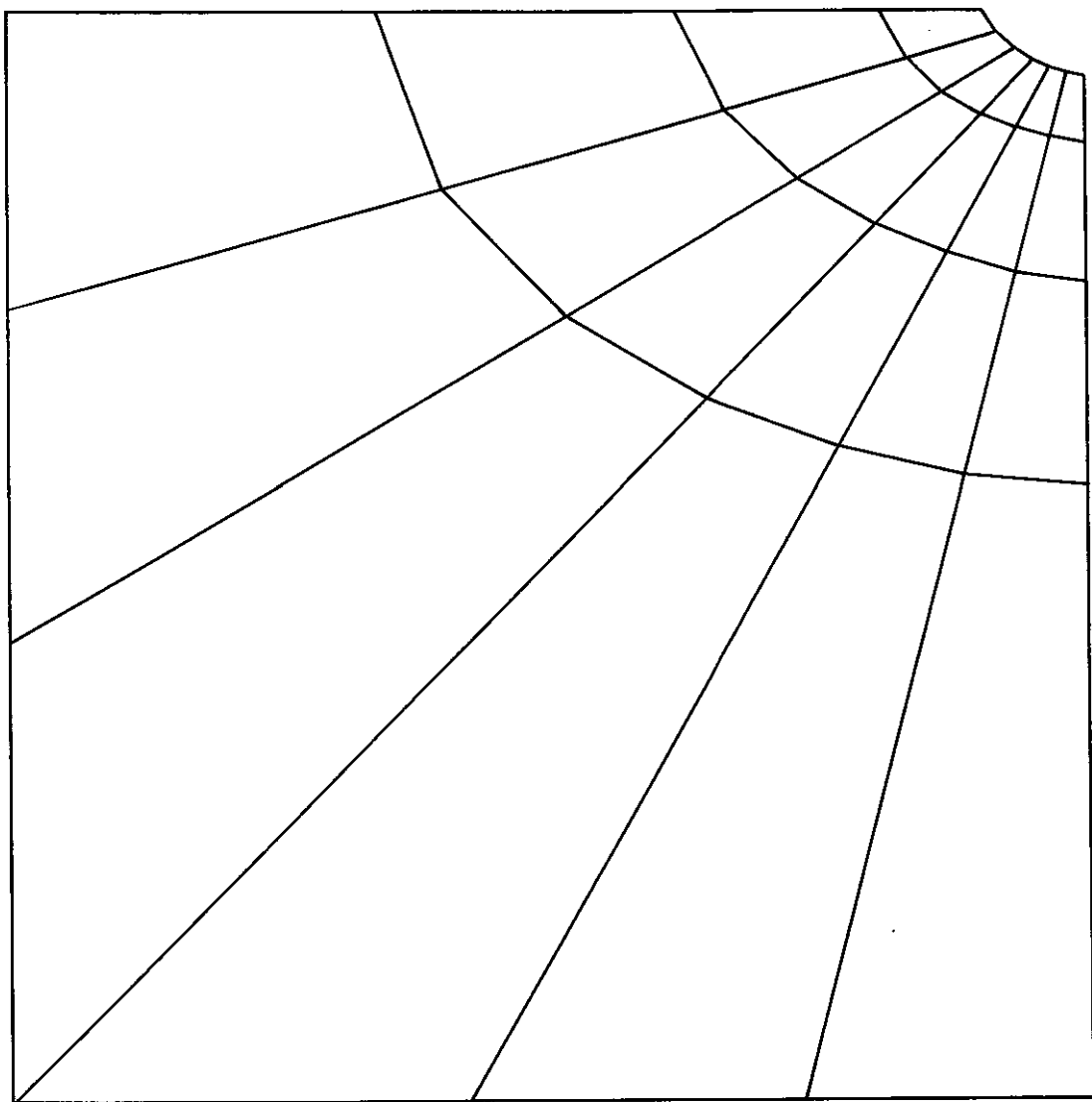
$$\mathcal{L} = 9^\circ$$

$$c = 1/50$$



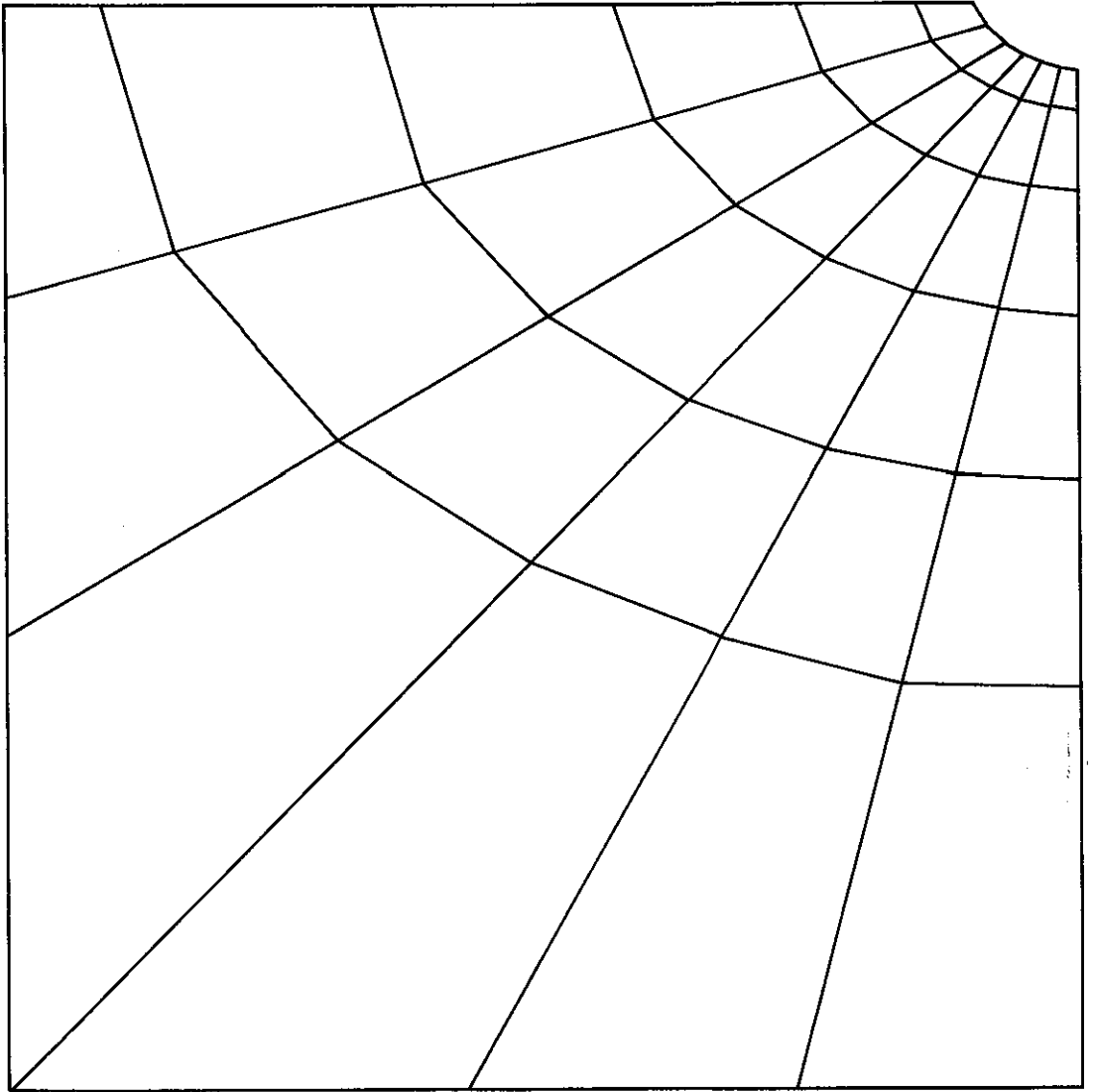
$$L = 15^\circ$$

$$c = 1/8$$



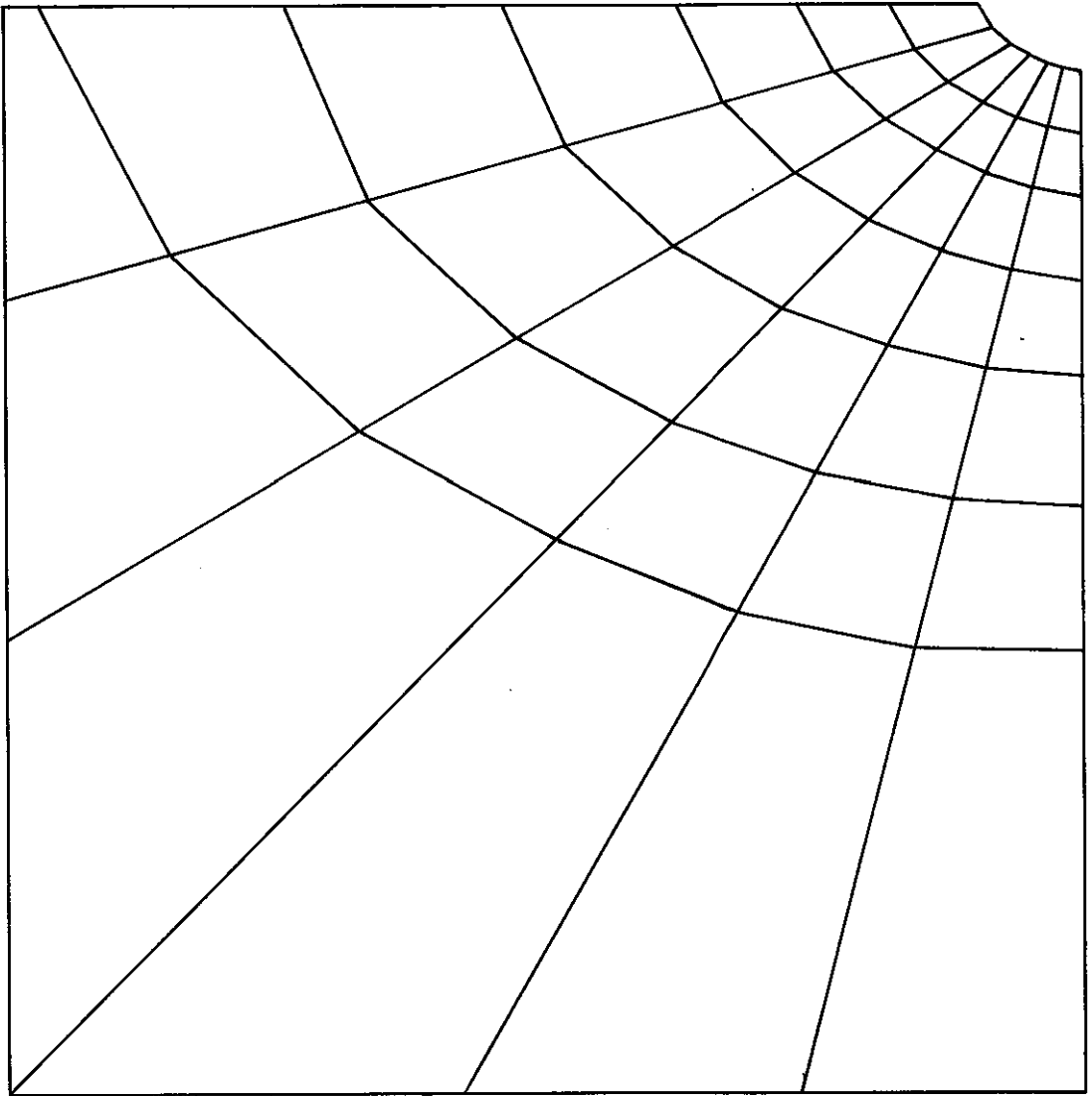
$\mathcal{L} = 15^\circ$

$c = 1/15$



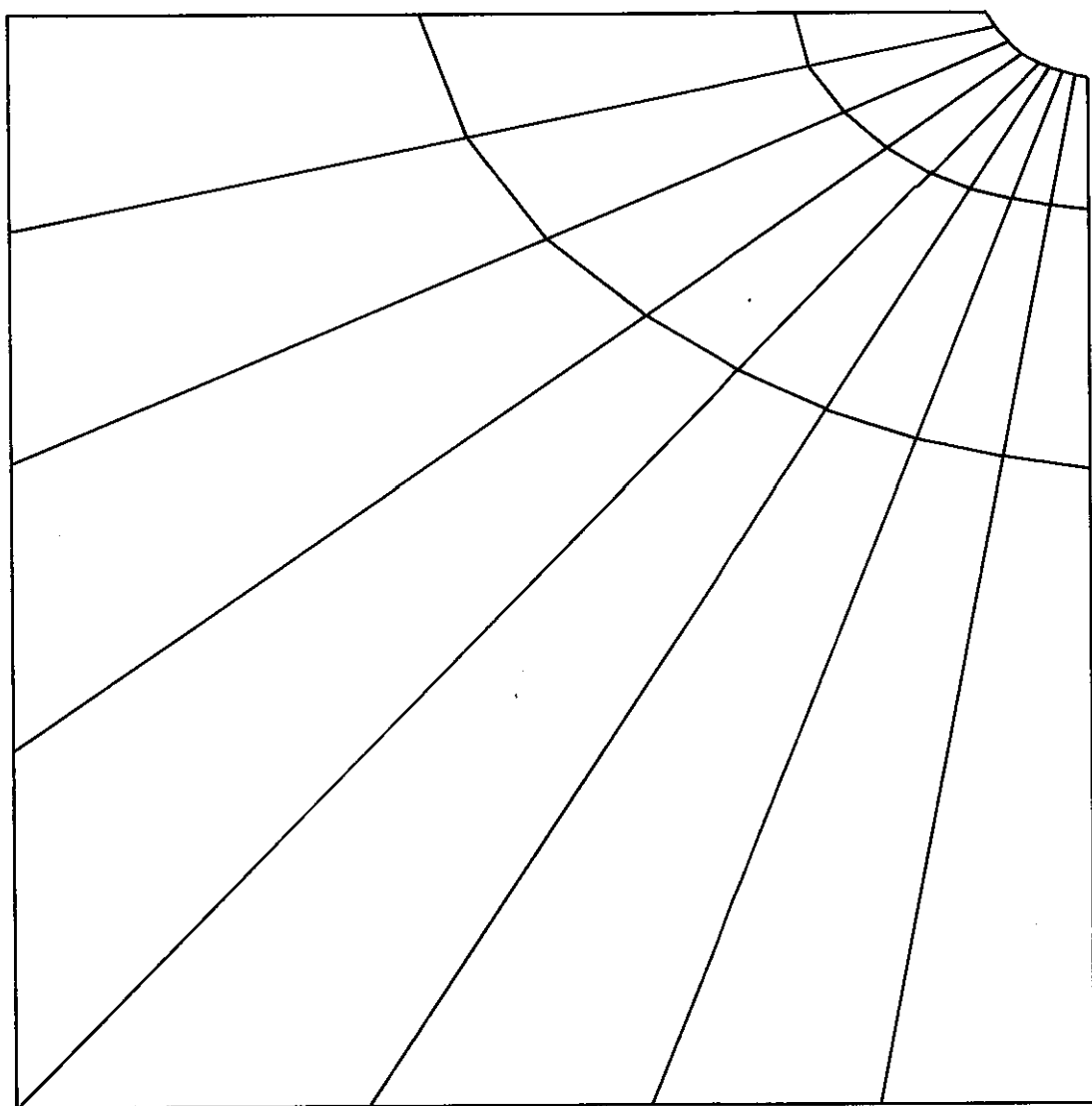
$$\mathcal{L} = 15^\circ$$

$$c = 1/25$$



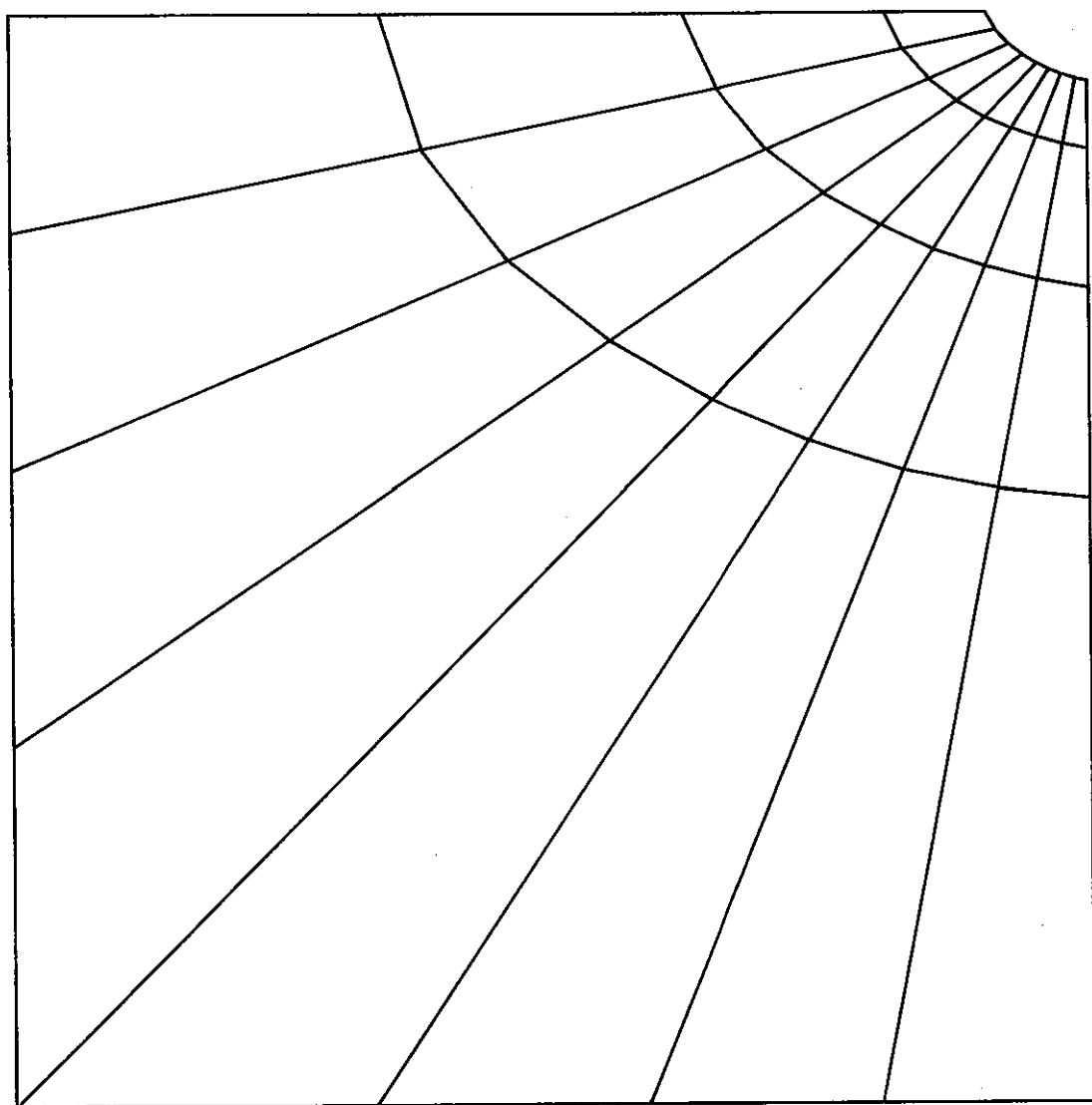
$$\alpha = 15^\circ$$

$$c = 1/50$$



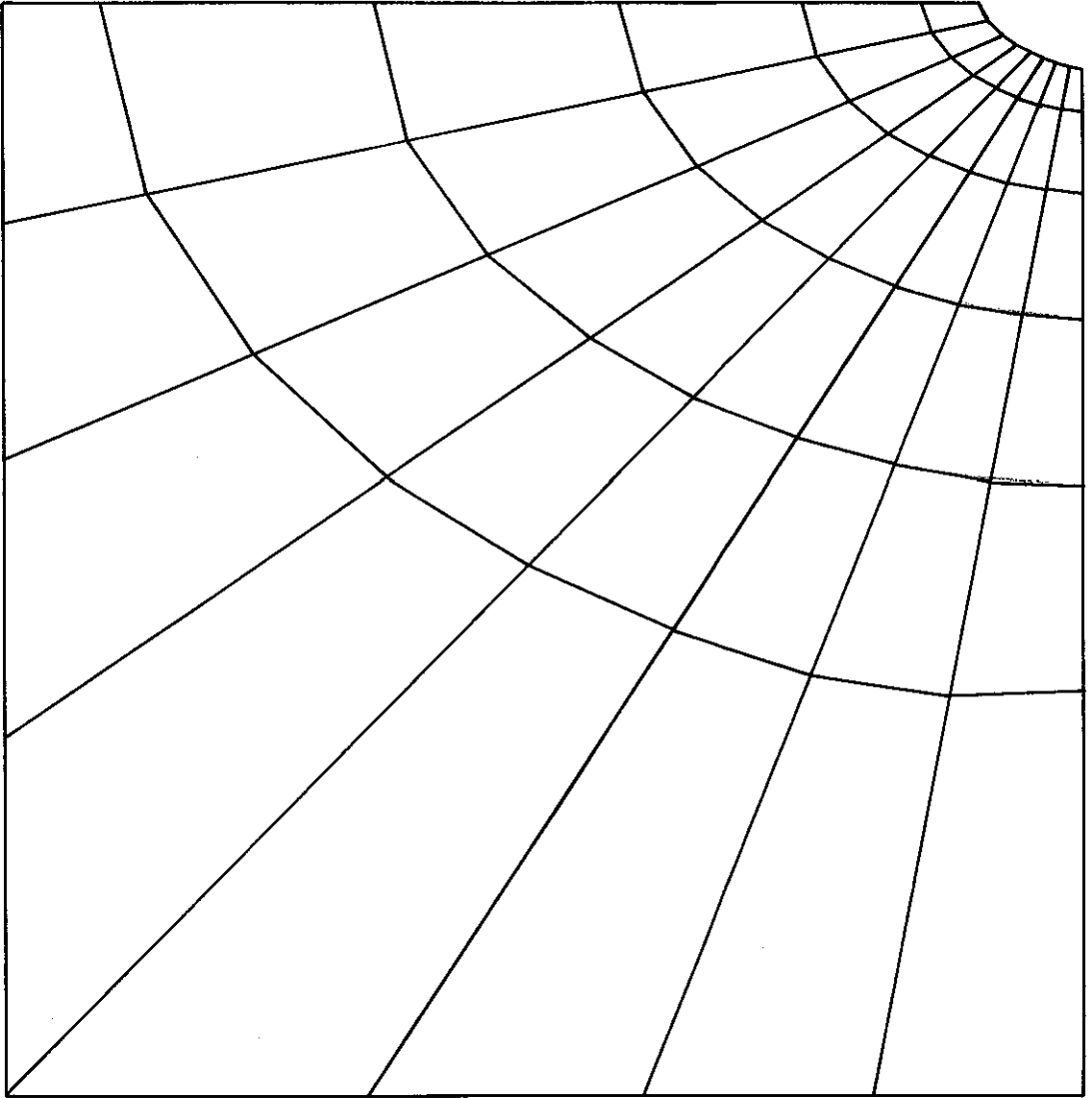
$$\mathcal{L} = 11,25^\circ$$

$$c = 1/8$$



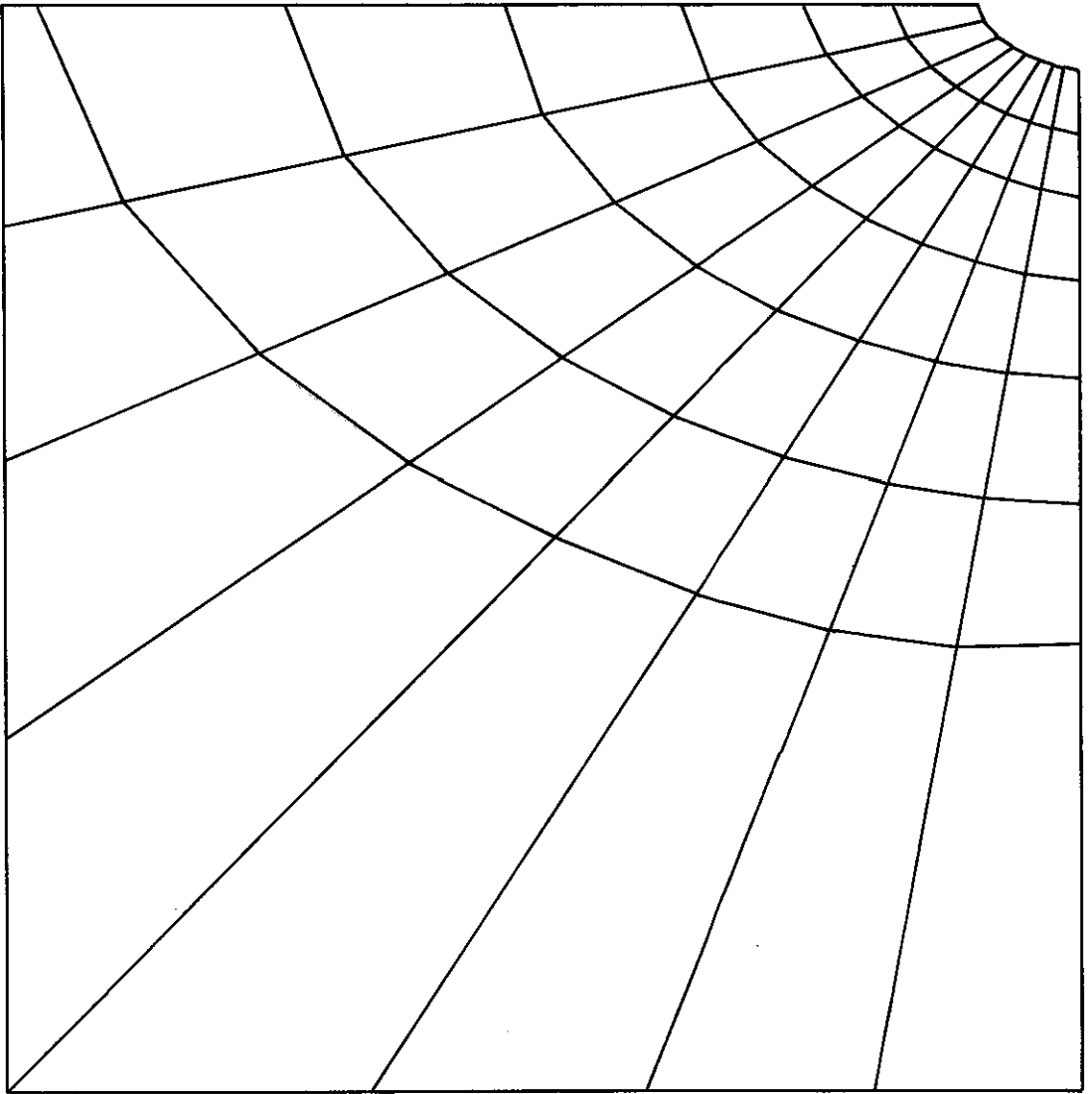
$$\alpha = 11,25^\circ$$

$$c = 1/15$$



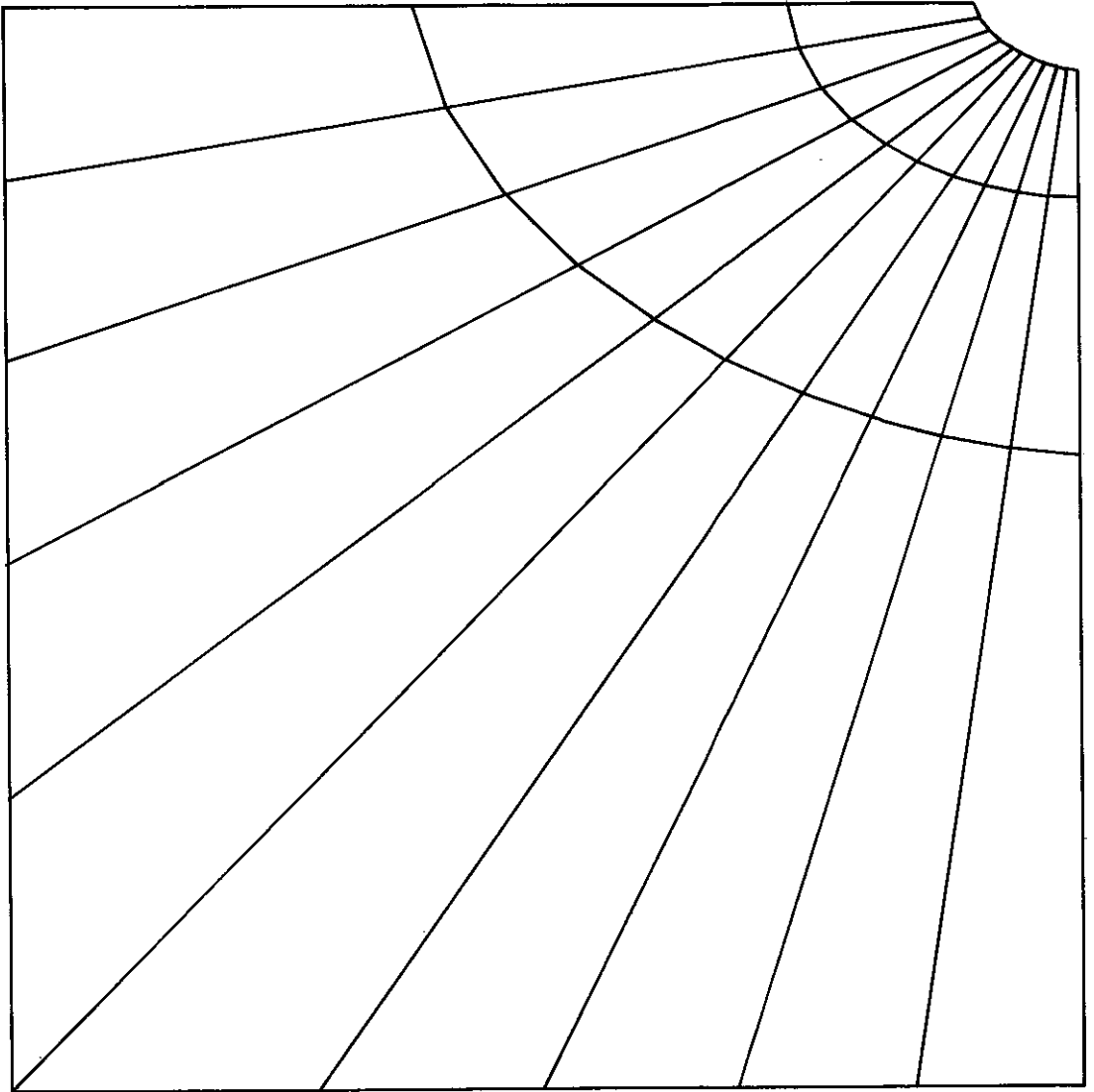
$$\mathcal{L} = 11,25^\circ$$

$$c = 1 / 25$$



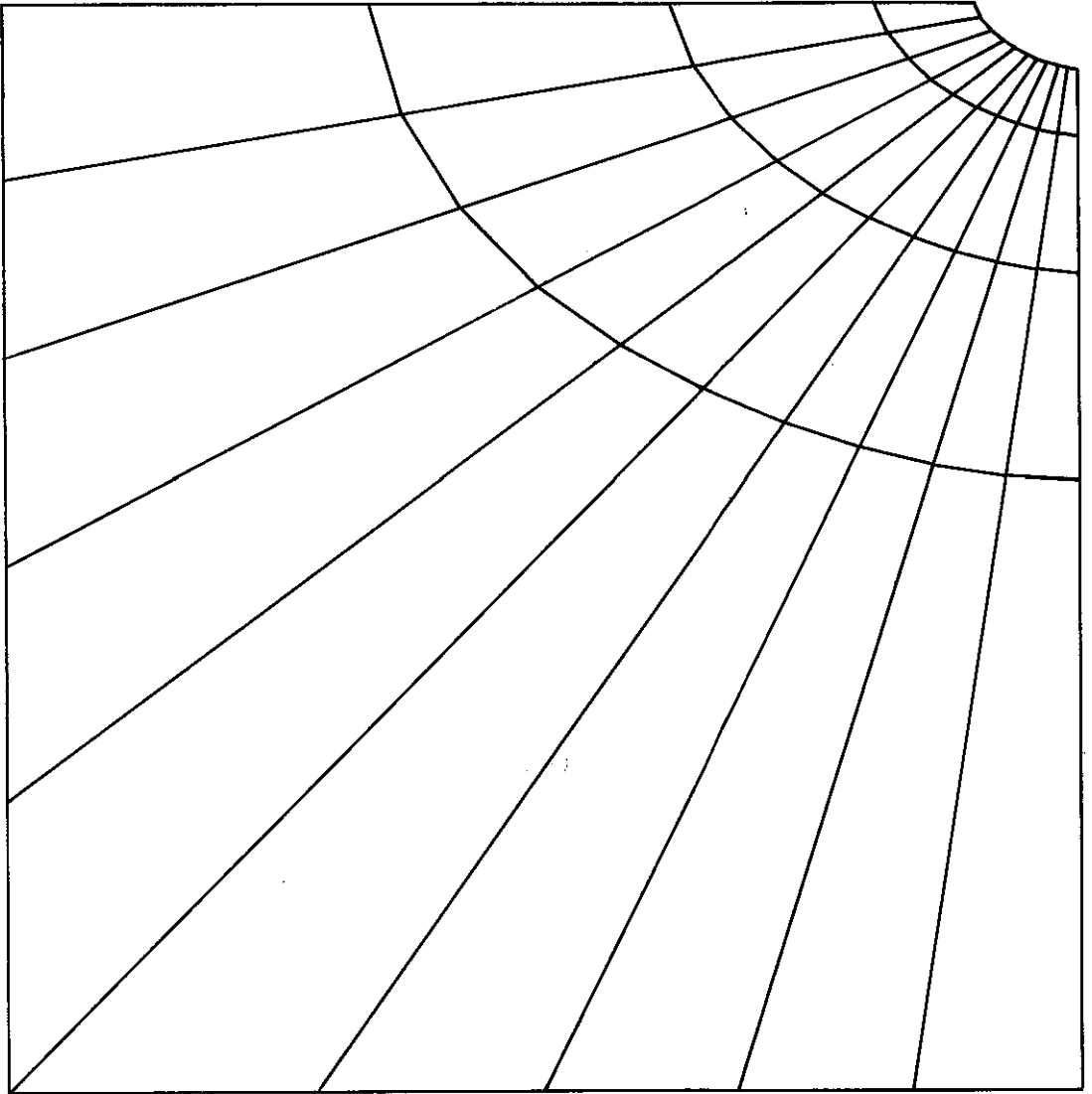
$\alpha = 11, 25^\circ$

$c = 1/50$



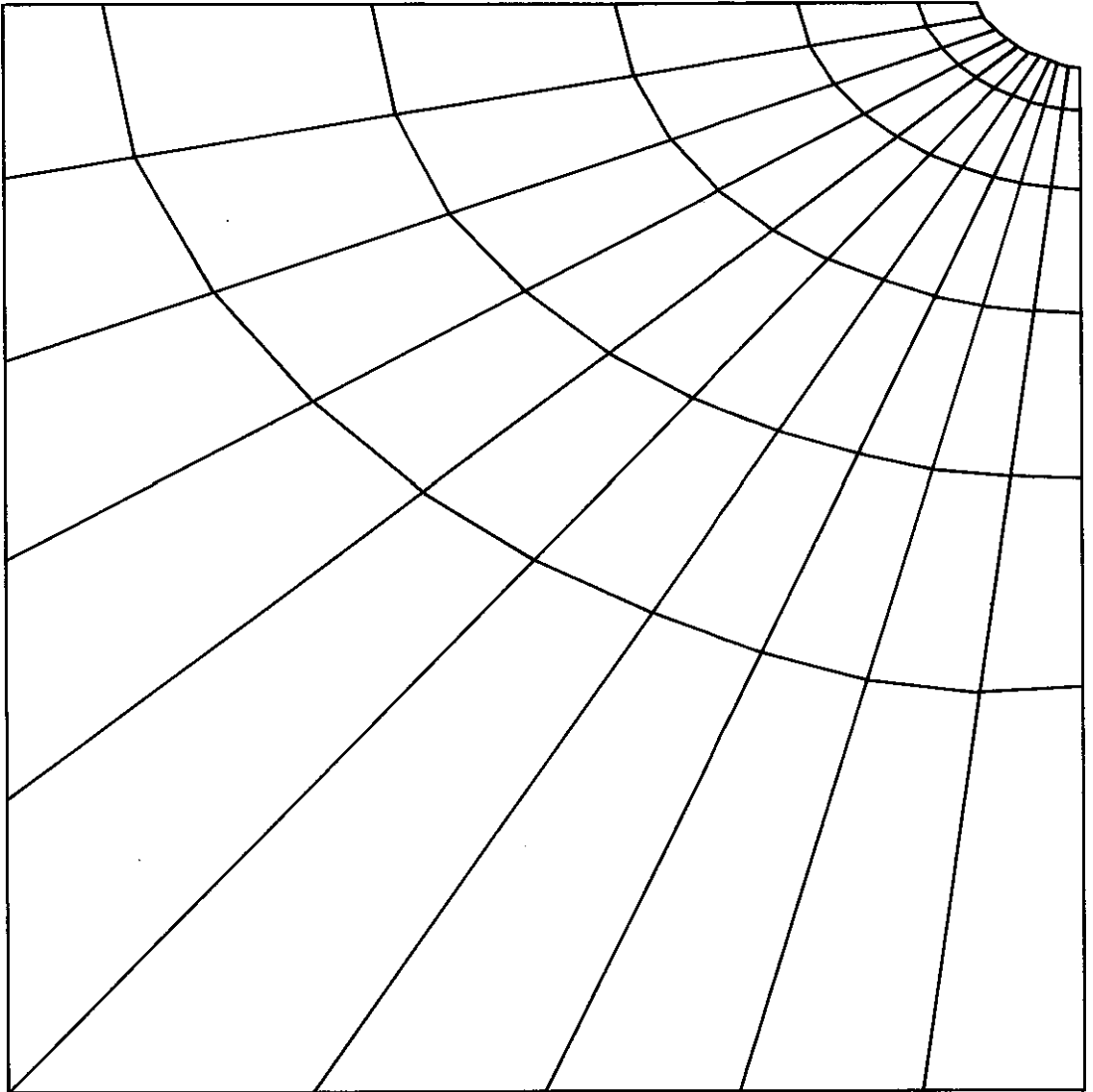
$$\alpha = 90^\circ$$

$$c = 1/8$$



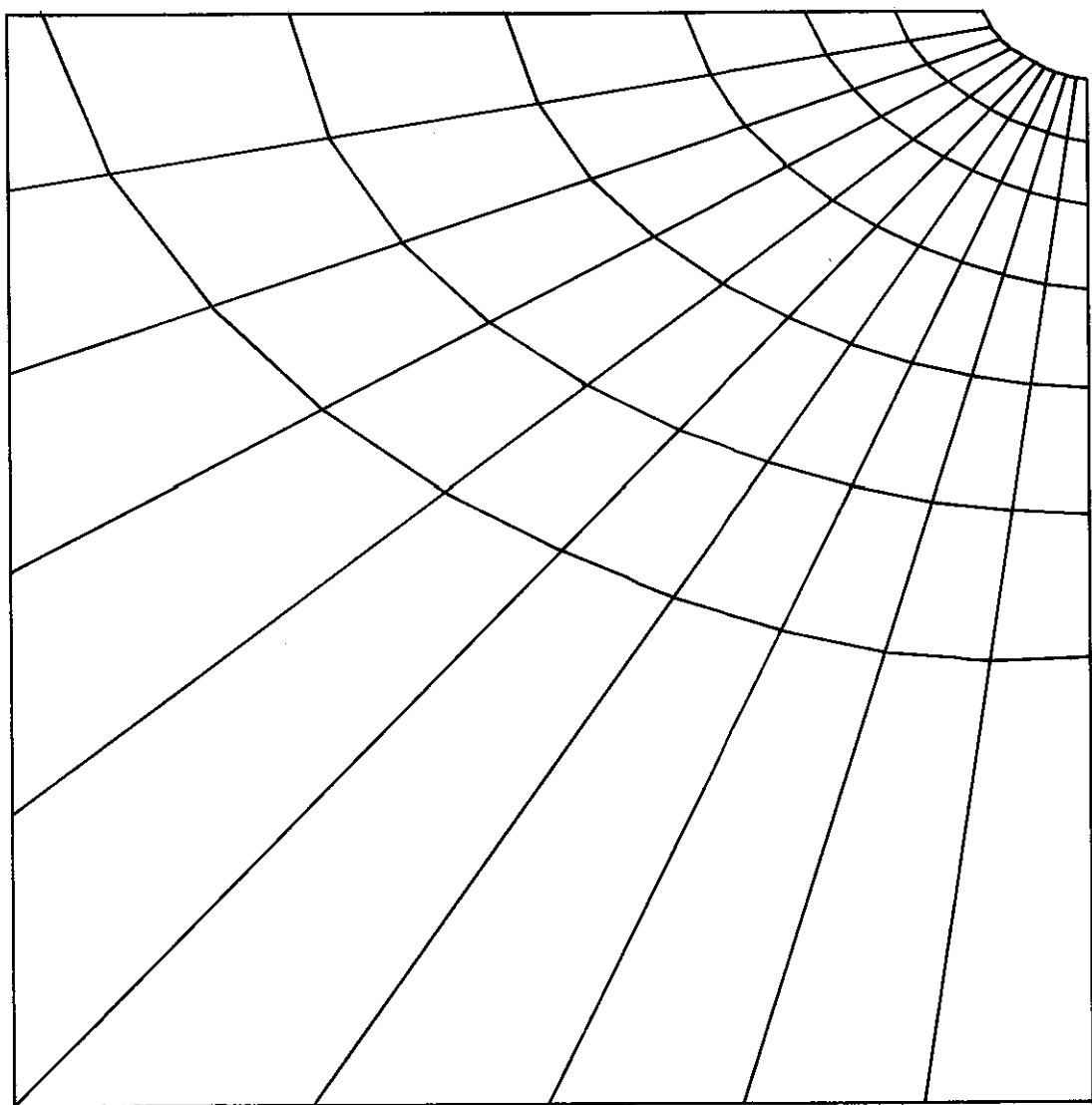
$\alpha = 9^\circ$

$c = 1/15$



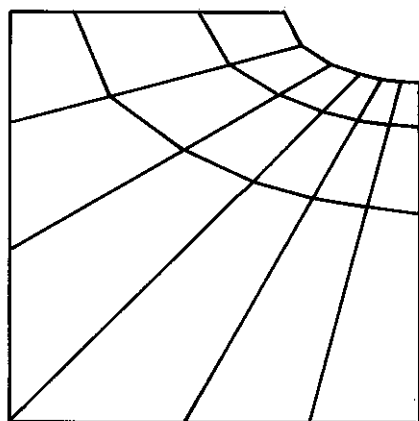
$$\alpha = 9^\circ$$

$$c = 1/25$$



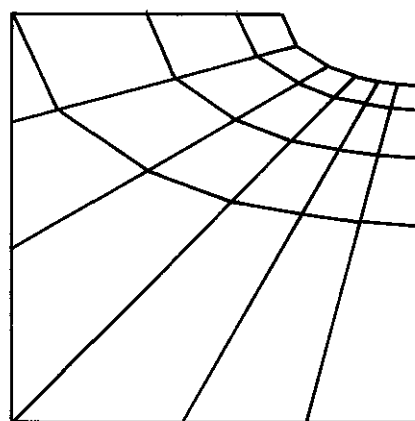
$$\alpha = 9^\circ$$

$$c = 1/50$$



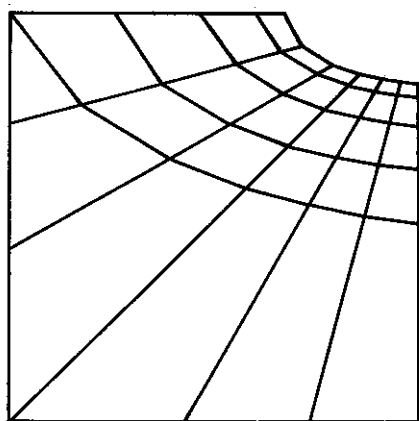
$\alpha = 15^\circ$

$c = 1/8$



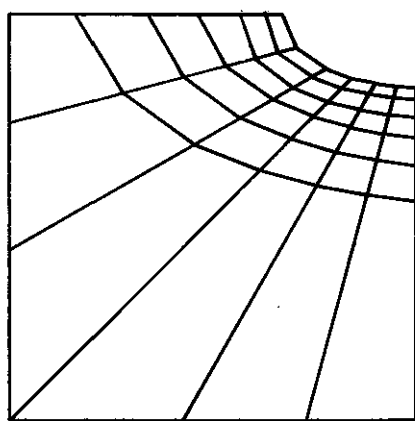
$\alpha = 15^\circ$

$c = 1/15$



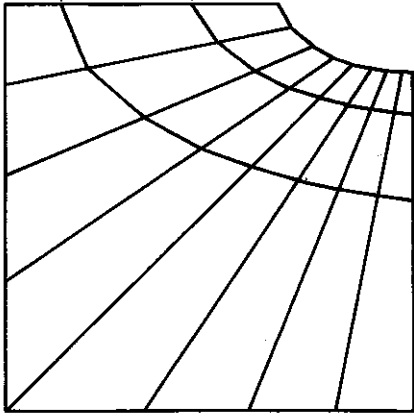
$\alpha = 15^\circ$

$c = 1/25$



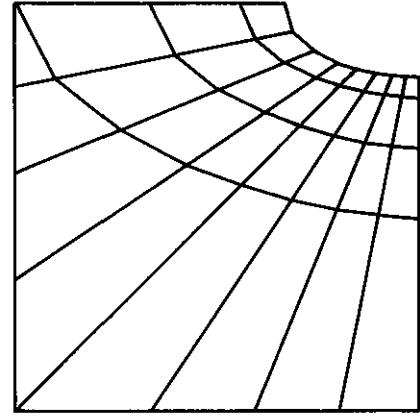
$\alpha = 15^\circ$

$c = 1/50$



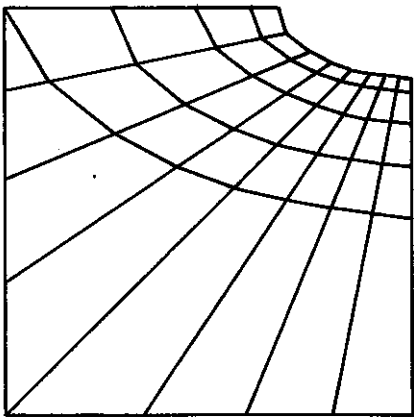
$\mathcal{L} = 11, 25^\circ$

$c = 1/8$



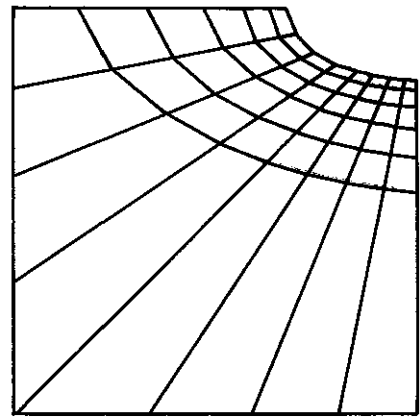
$\mathcal{L} = 11, 25^\circ$

$c = 1/15$



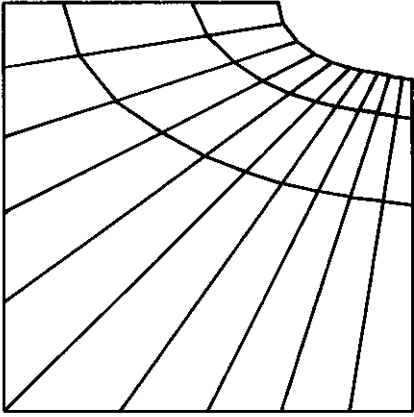
$\mathcal{L} = 11, 25^\circ$

$c = 1/25$



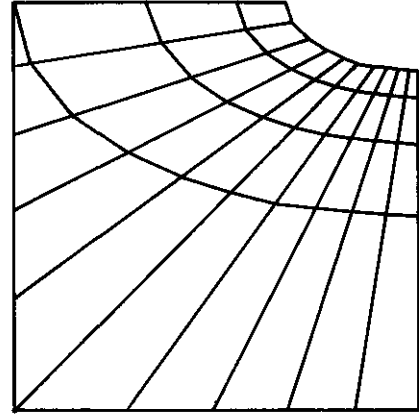
$\mathcal{L} = 11, 25^\circ$

$c = 1/50$



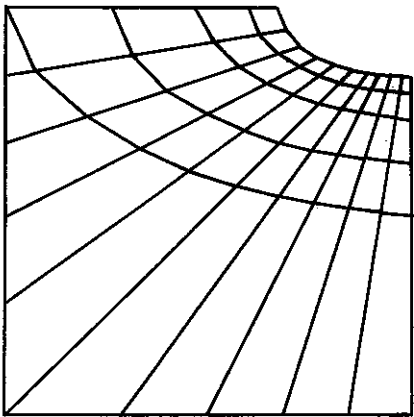
$\mathcal{L} = 9^\circ$

$c = 1/8$



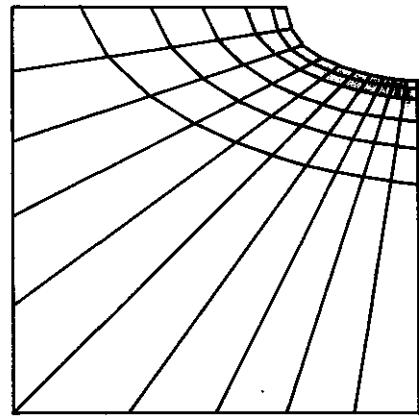
$\mathcal{L} = 9^\circ$

$c = 1/15$



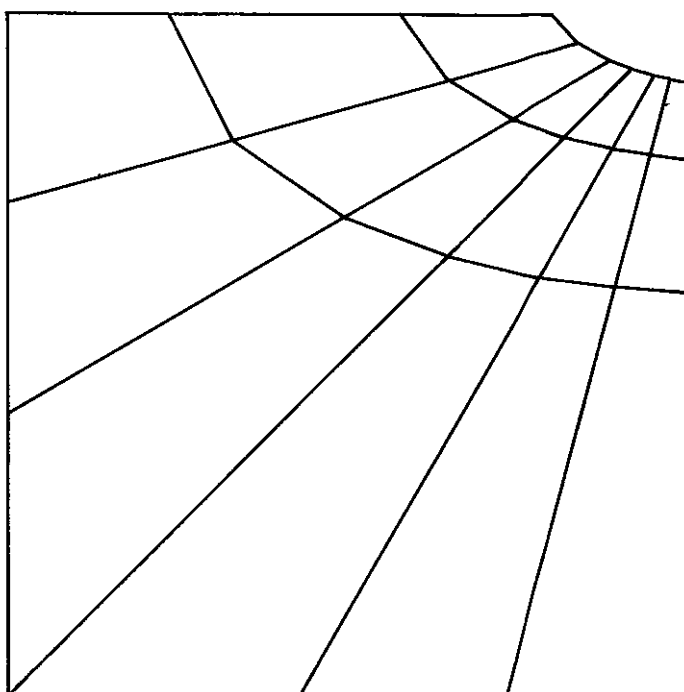
$\mathcal{L} = 9^\circ$

$c = 1/25$



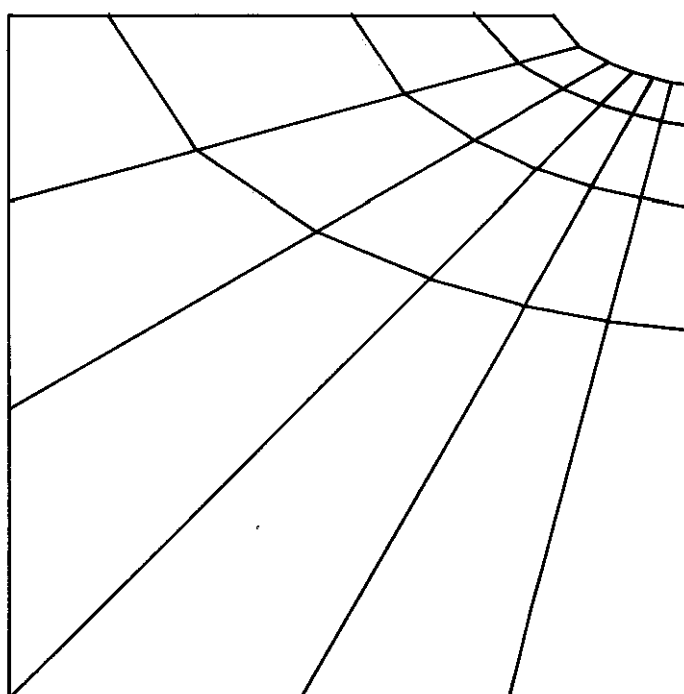
$\mathcal{L} = 9^\circ$

$c = 1/50$



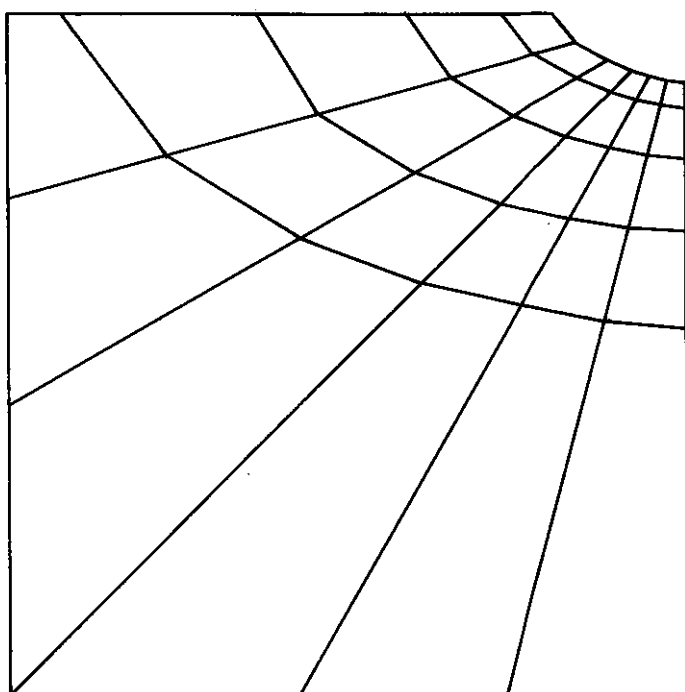
$\mathcal{L} = 15^\circ$

$c = 1/8$



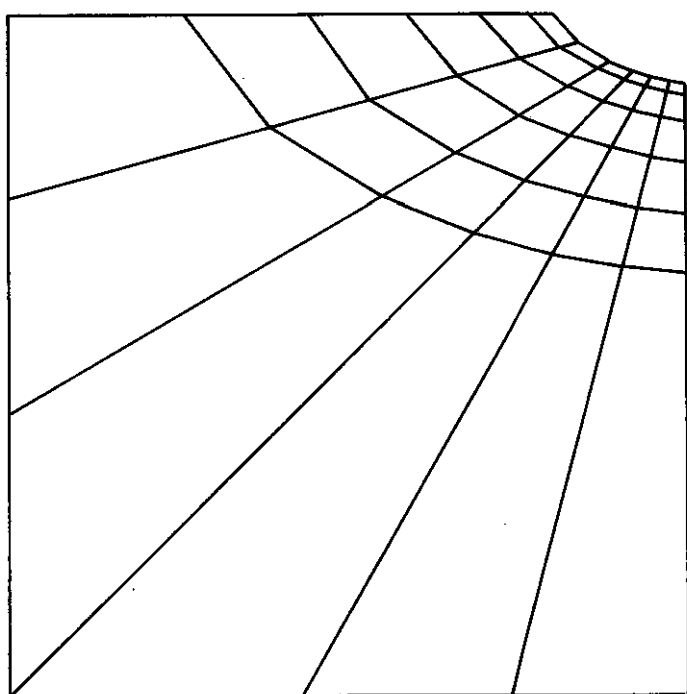
$\mathcal{L} = 15^\circ$

$c = 1/15$



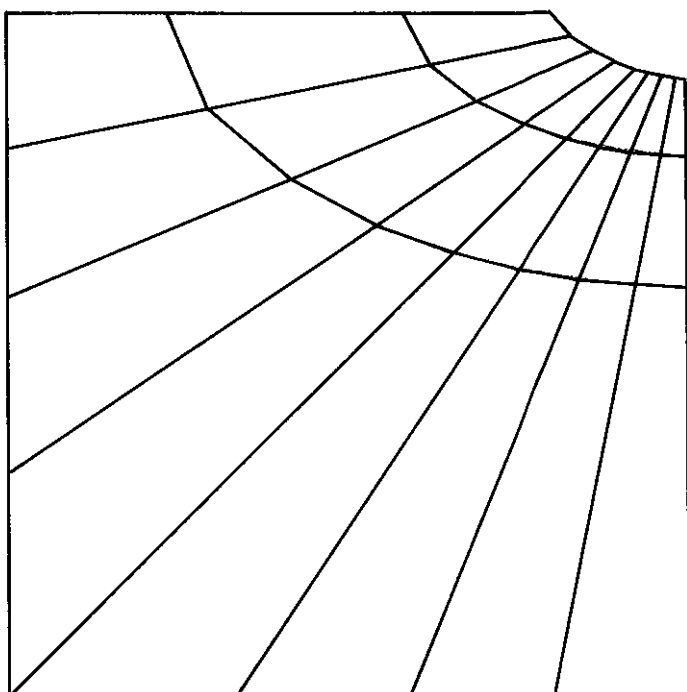
$L = 15^\circ$

$c = 1/25$



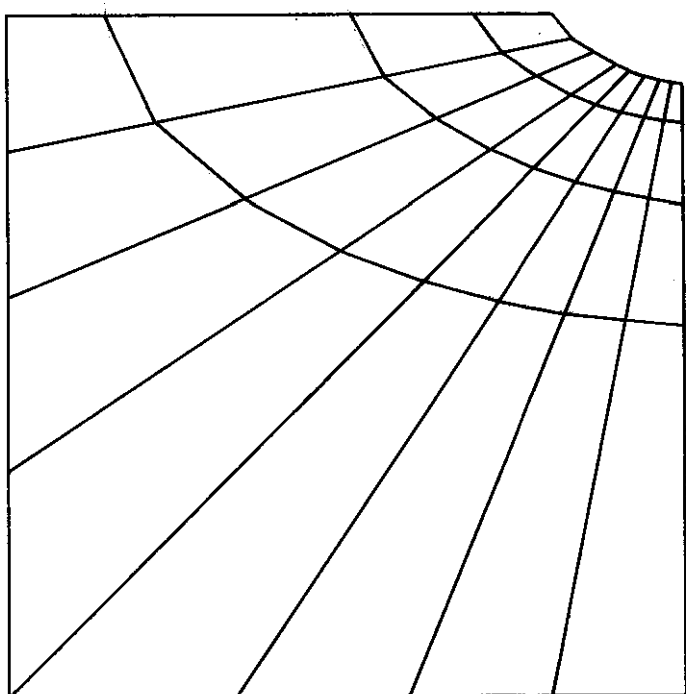
$L = 15^\circ$

$c = 1/50$



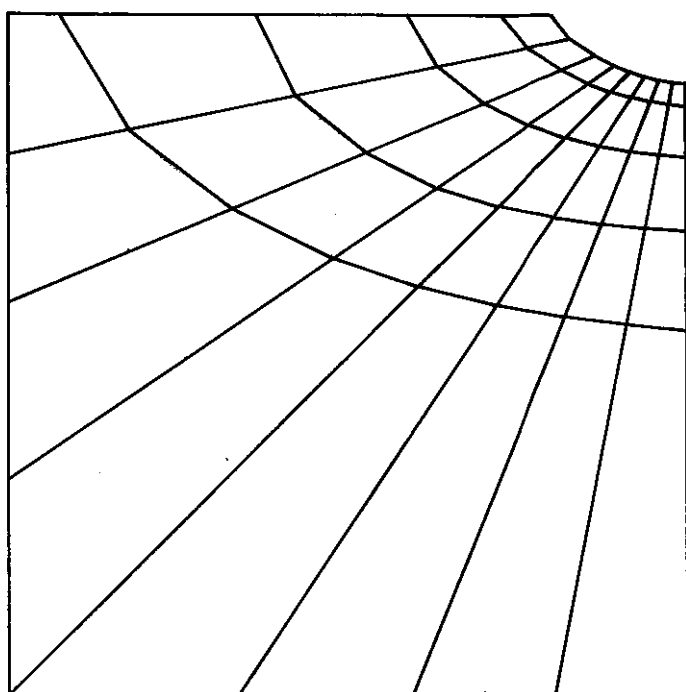
$\mathcal{L} = 11, 25^\circ$

$c = 1/8$



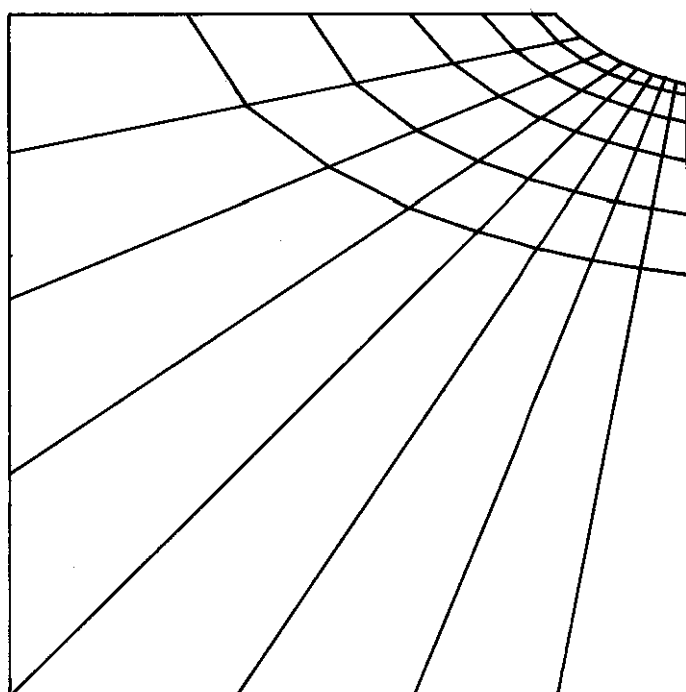
$\mathcal{L} = 11, 25^\circ$

$c = 1/15$



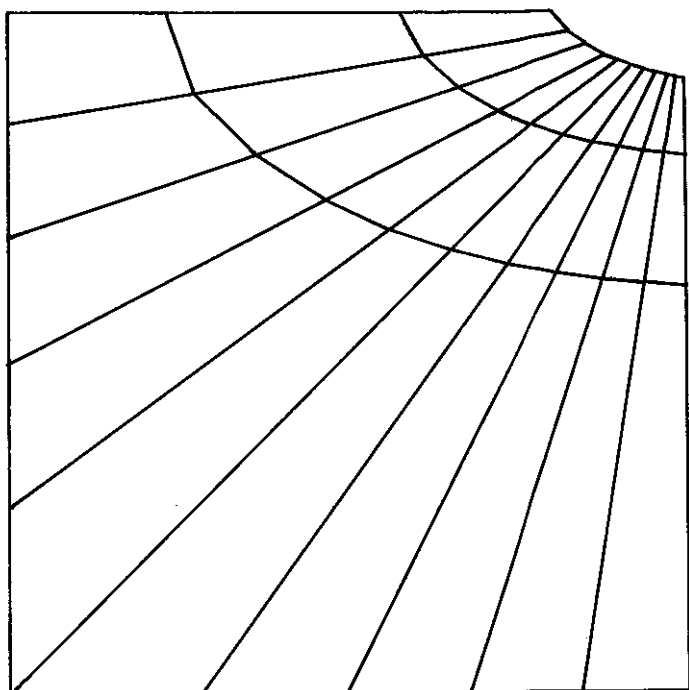
$$\mathcal{L} = 11, 25^\circ$$

$$c = 1/25$$



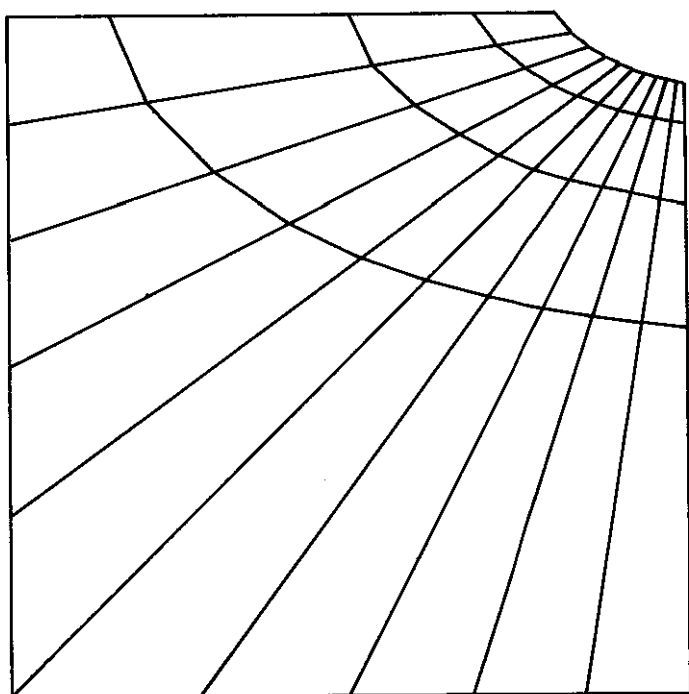
$$\mathcal{L} = 11, 25^\circ$$

$$c = 1/50$$



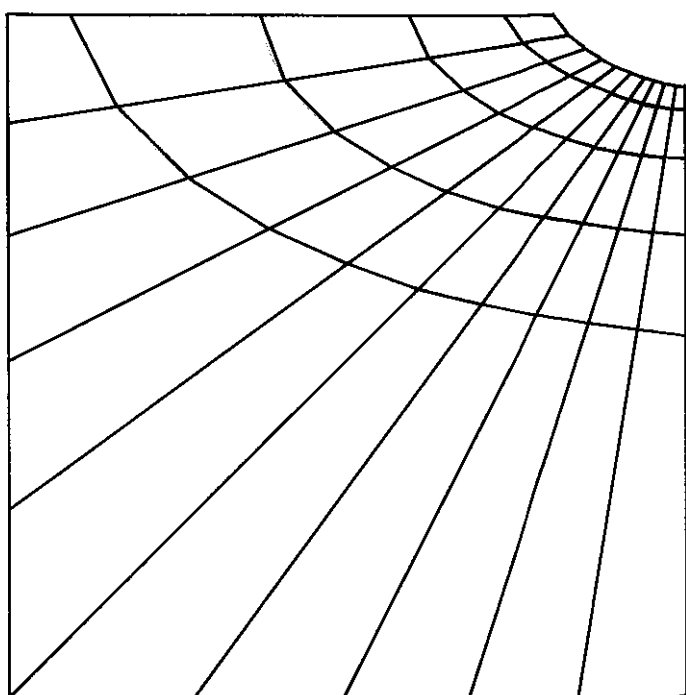
$\mathcal{L} = 9^\circ$

$c = 1/8$



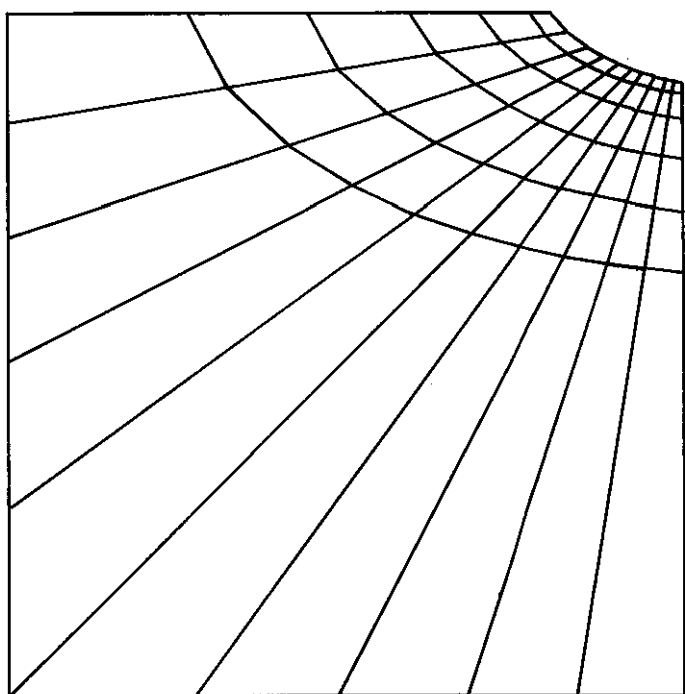
$\mathcal{L} = 9^\circ$

$c = 1/15$



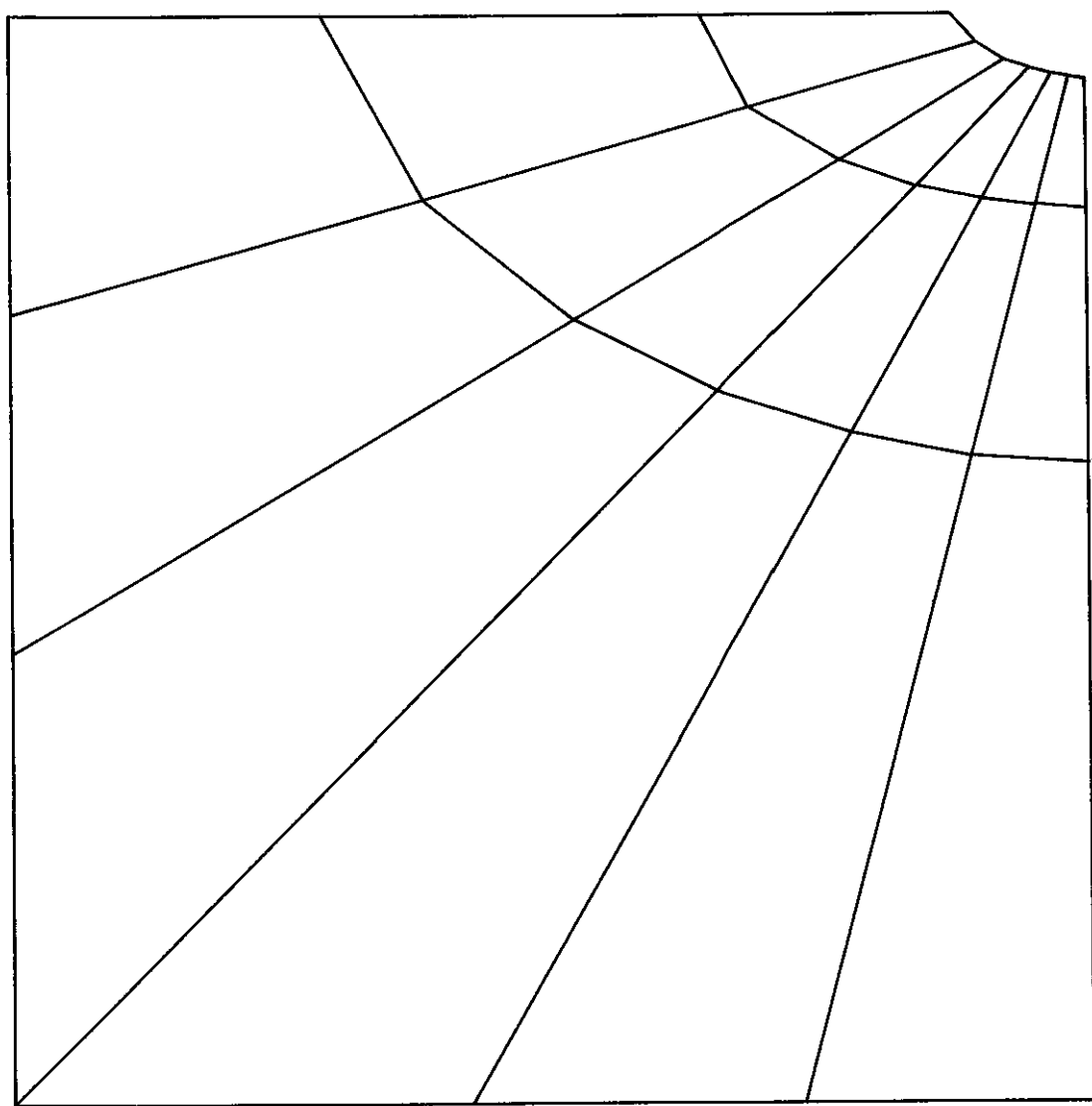
$\alpha = 90^\circ$

$c = 1/25$



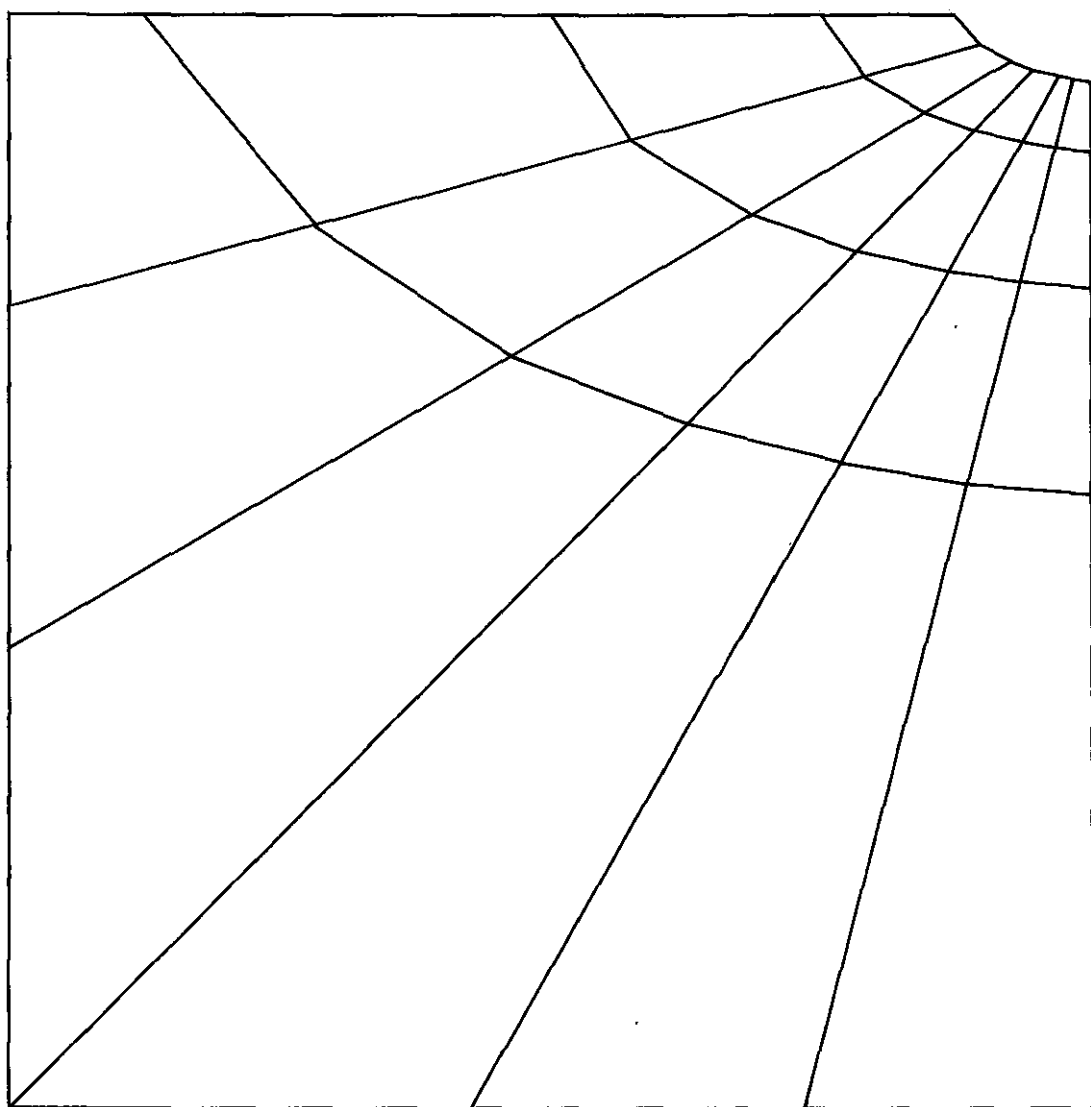
$\alpha = 90^\circ$

$c = 1/50$



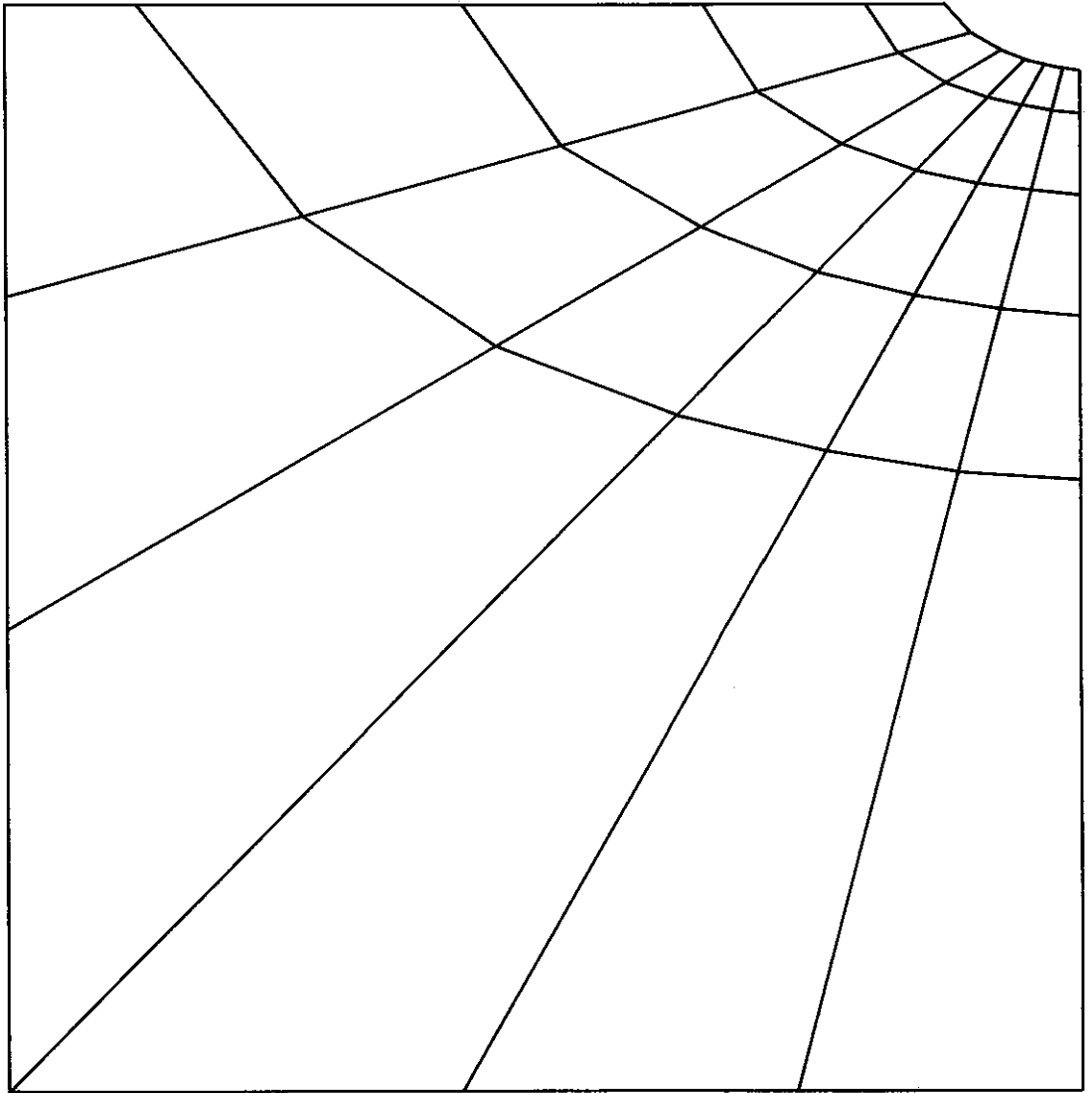
$$\alpha = 15^\circ$$

$$c = 1/8$$



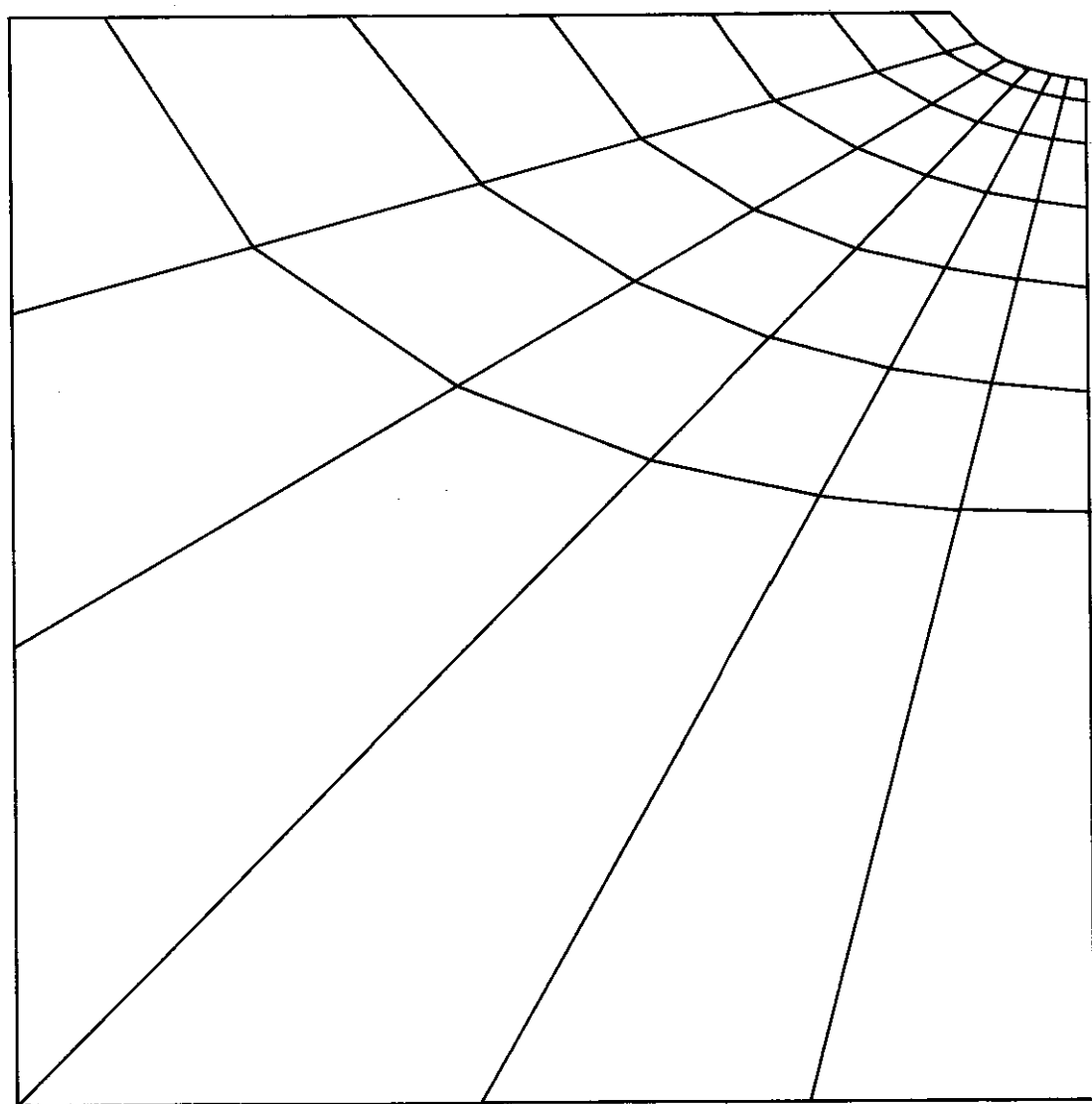
$$\angle = 15^\circ$$

$$c = 1 / 15$$



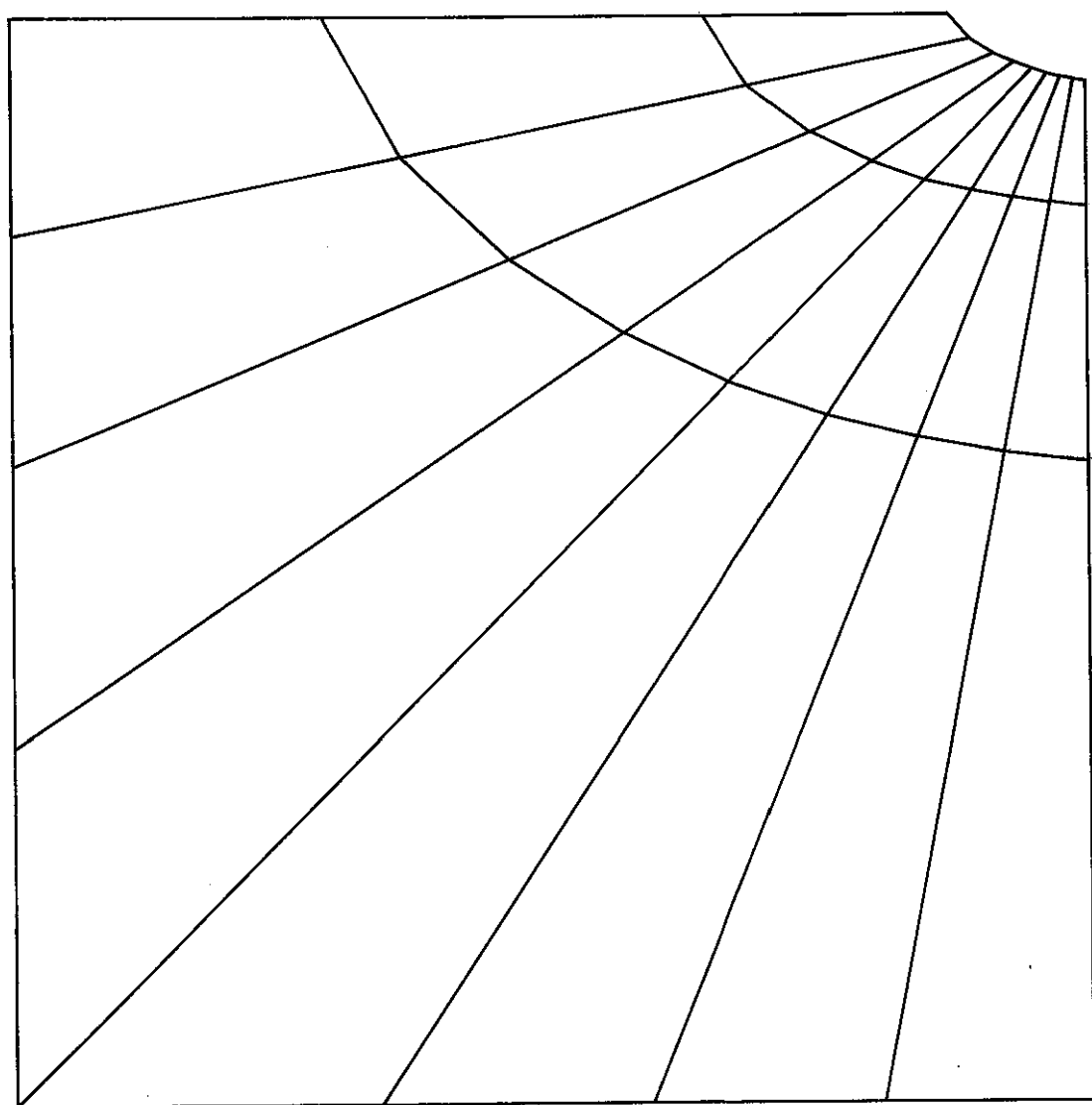
$$\angle = 15^\circ$$

$$c = 1/25$$



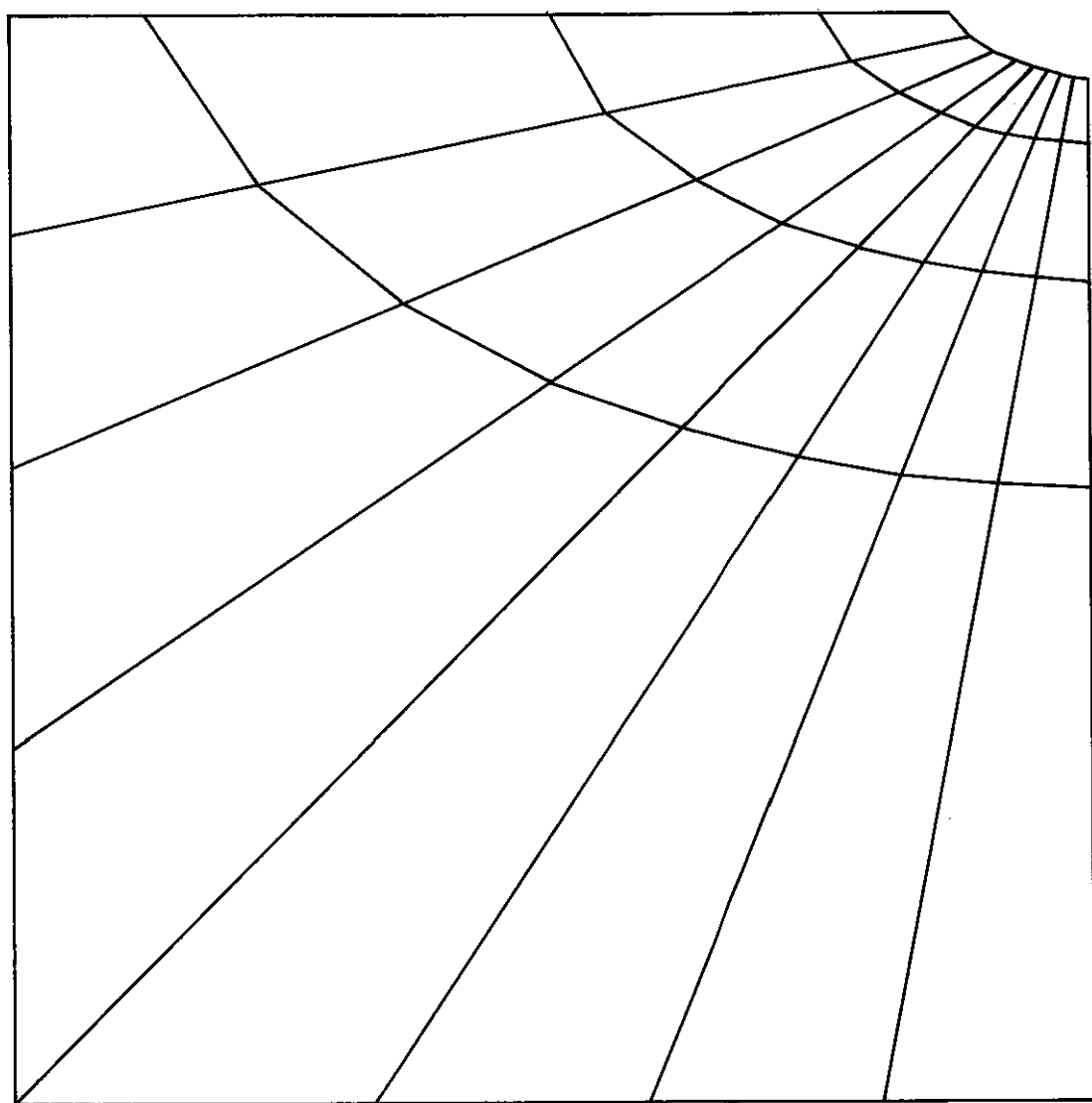
$\angle = 15^\circ$

$c = 1 / 50$



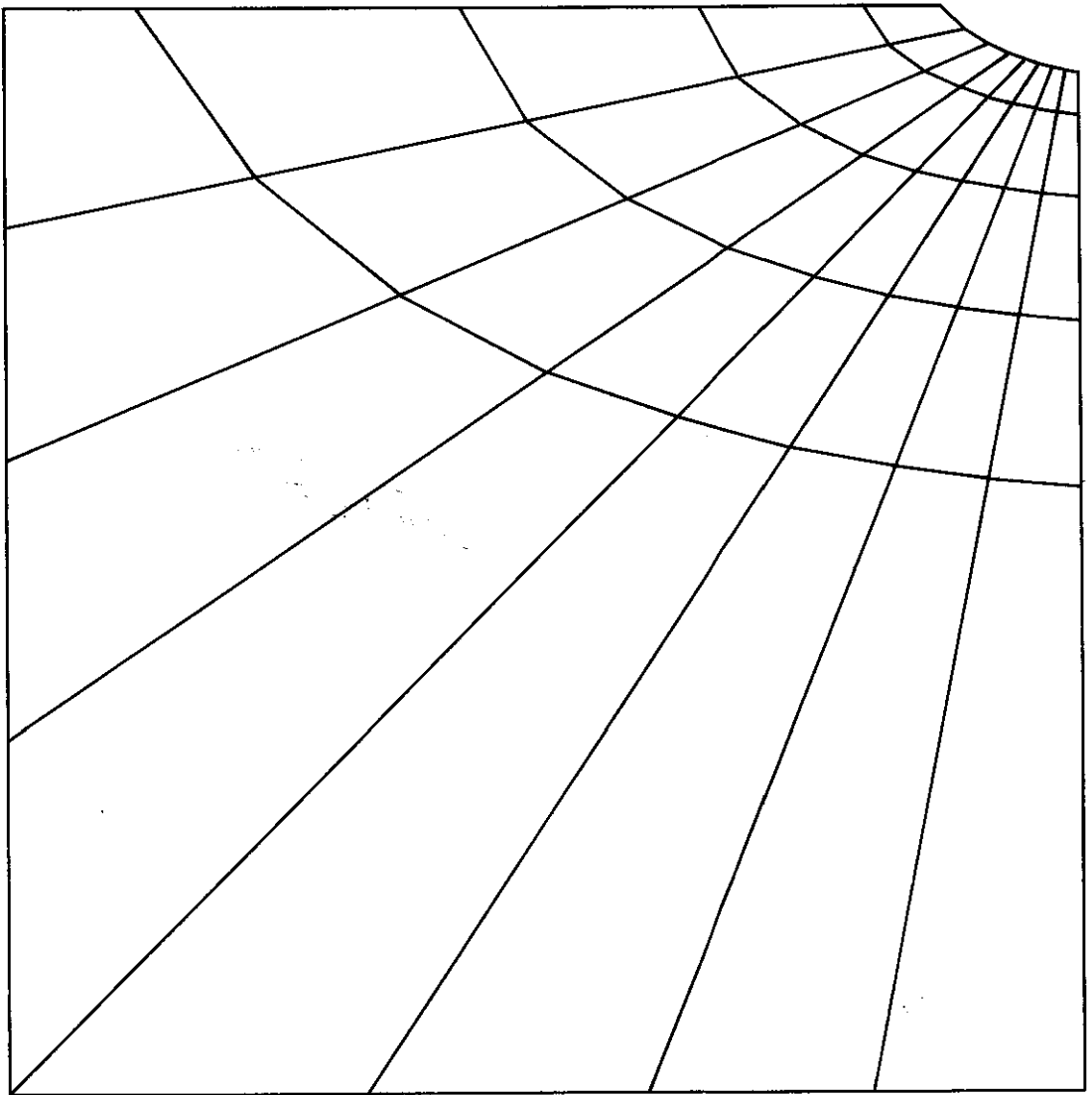
$$\mathcal{L} = 11, 25^\circ$$

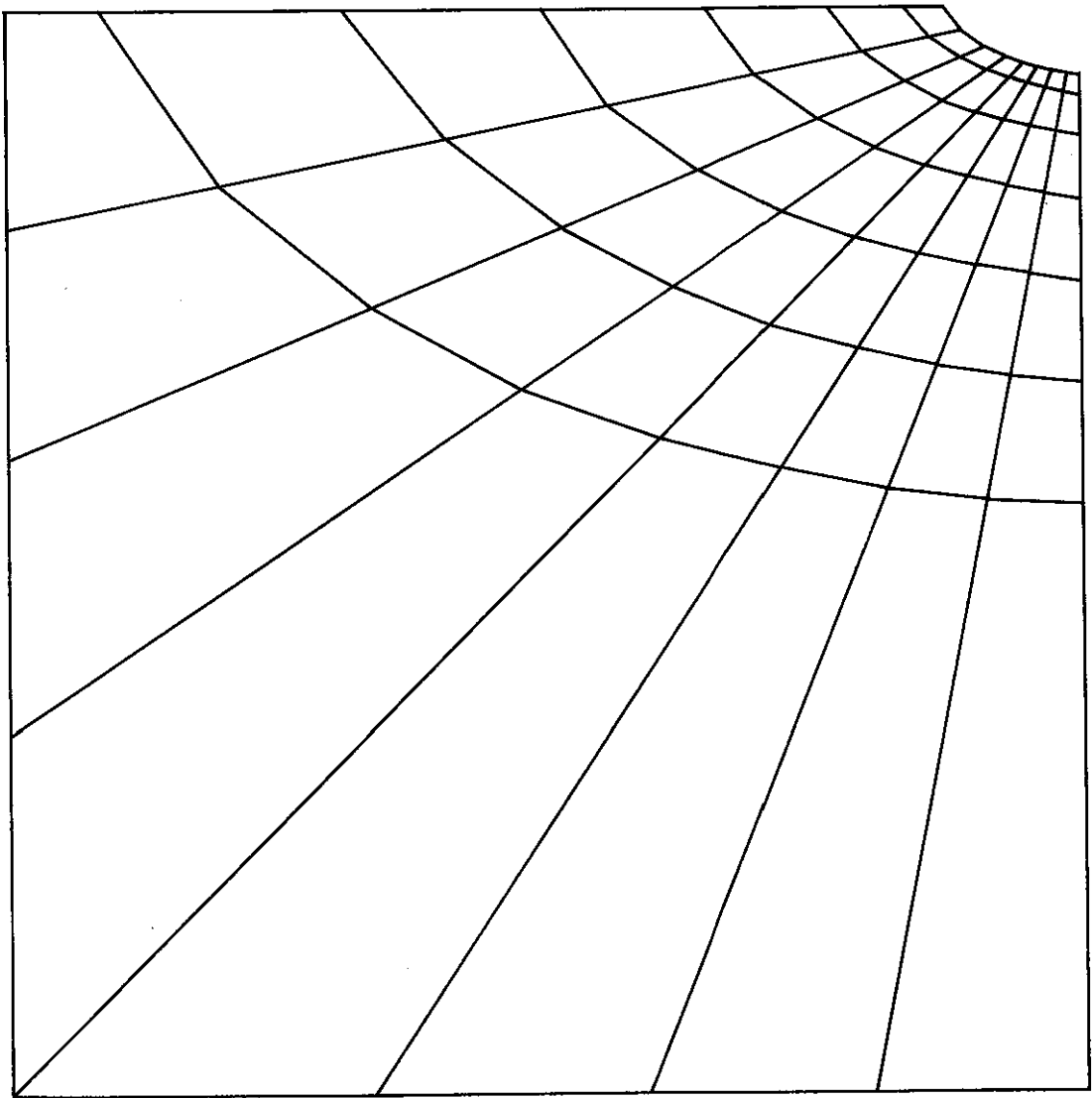
$$c = 1/8$$



$\angle = 11, 25^\circ$

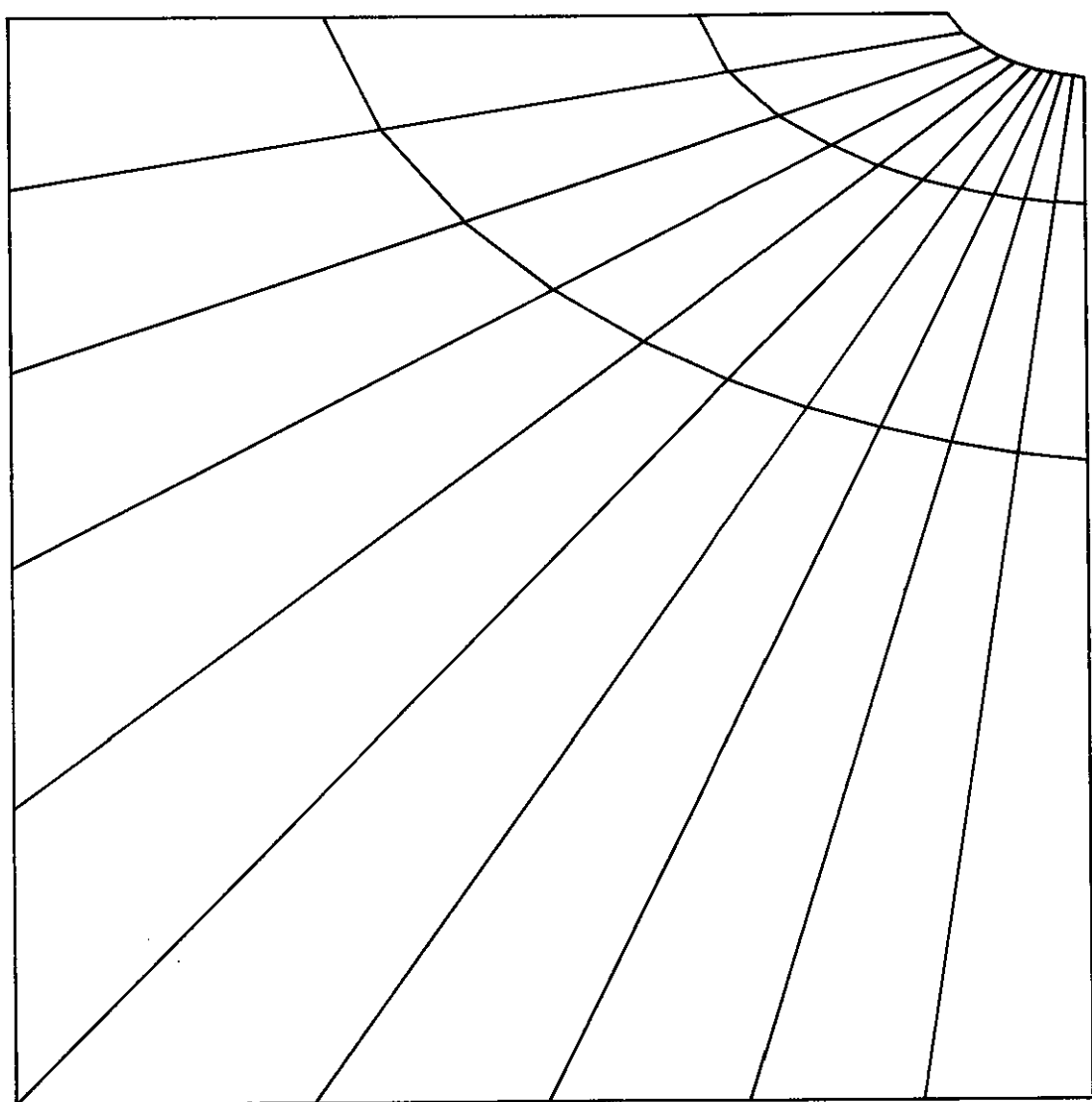
$c = 1/15$





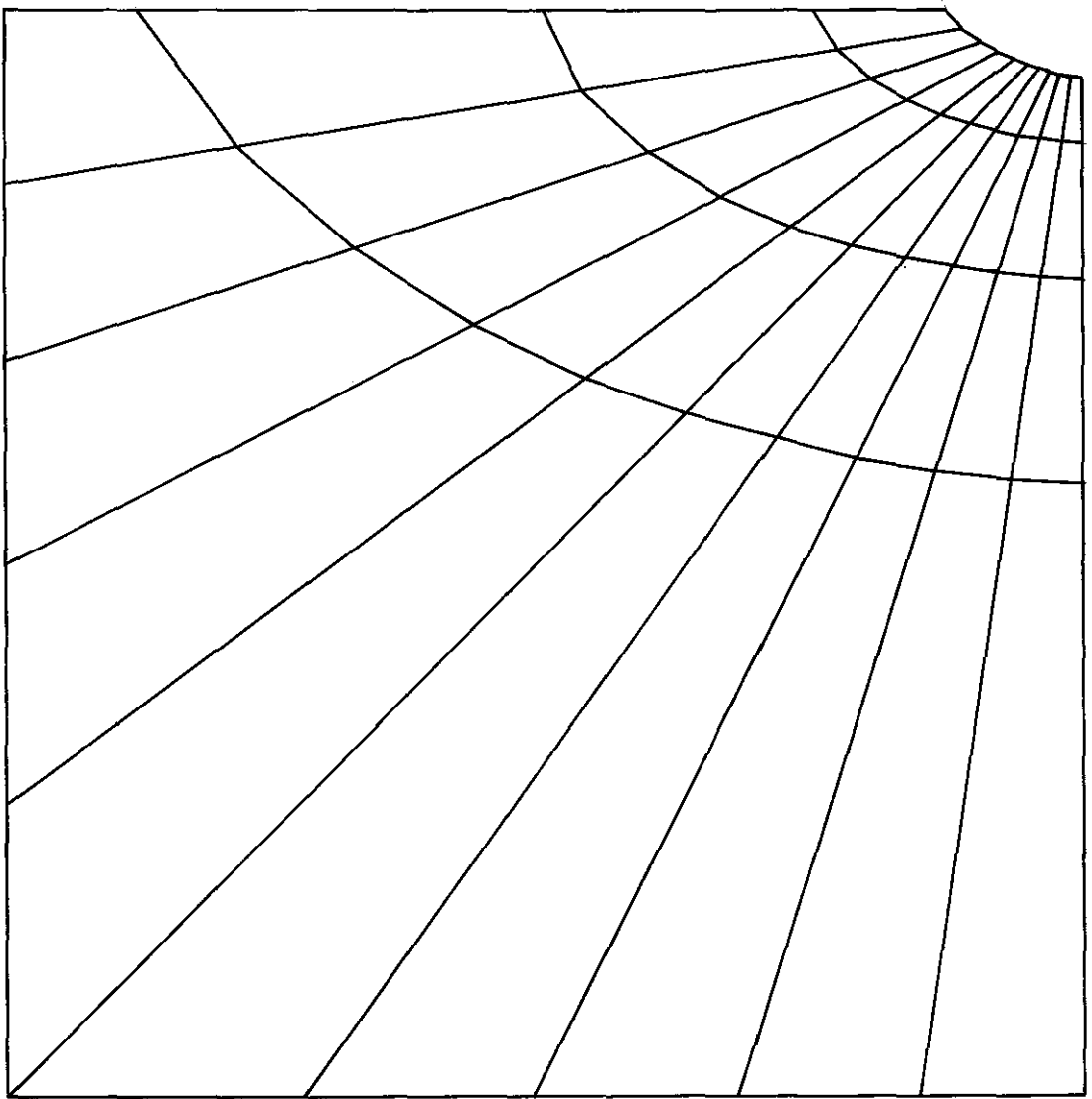
$\mathcal{L} = 11,25^\circ$

$c = 1/50$



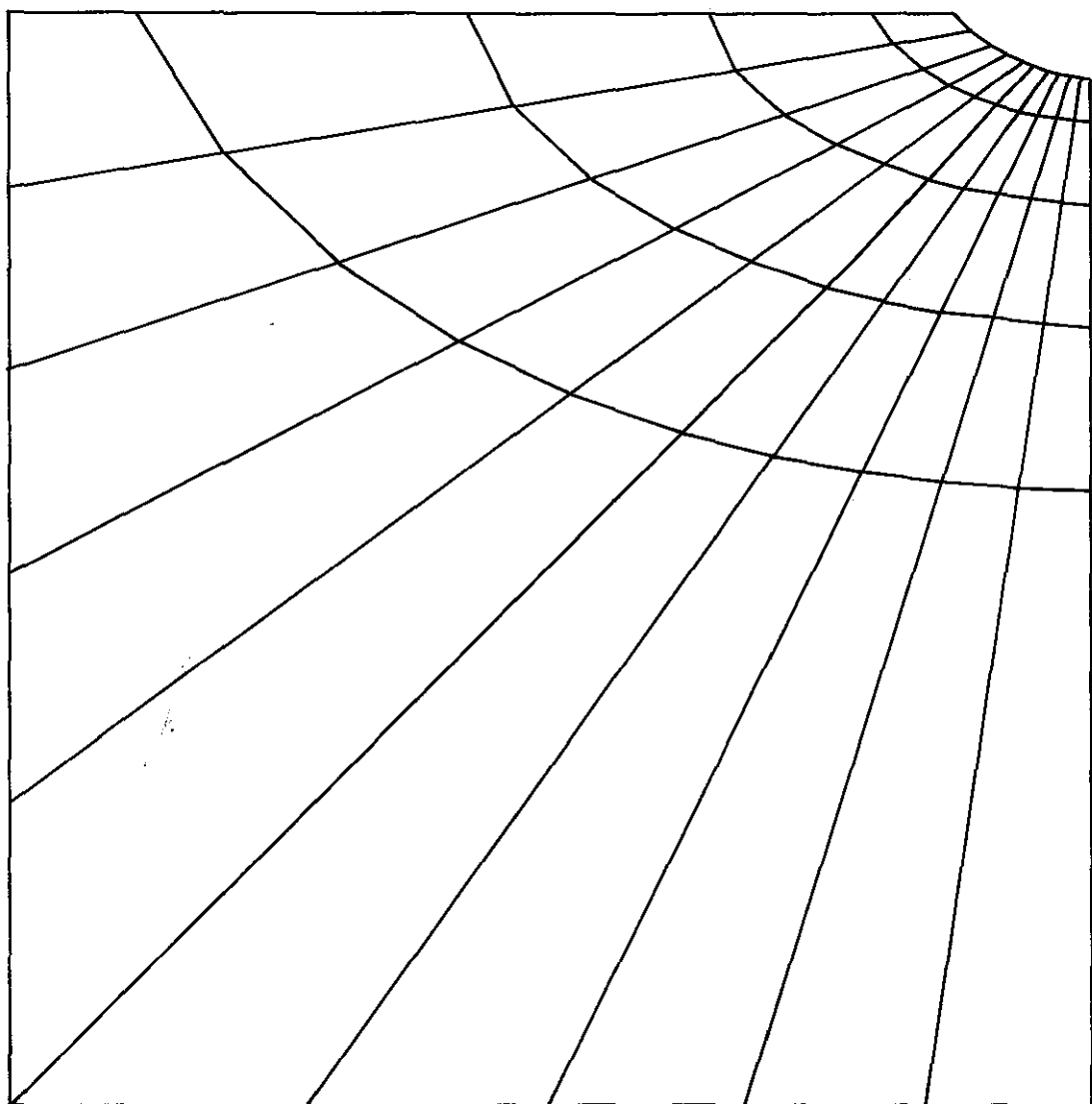
$$\mathcal{L} = 9^\circ$$

$$c = 1/8$$



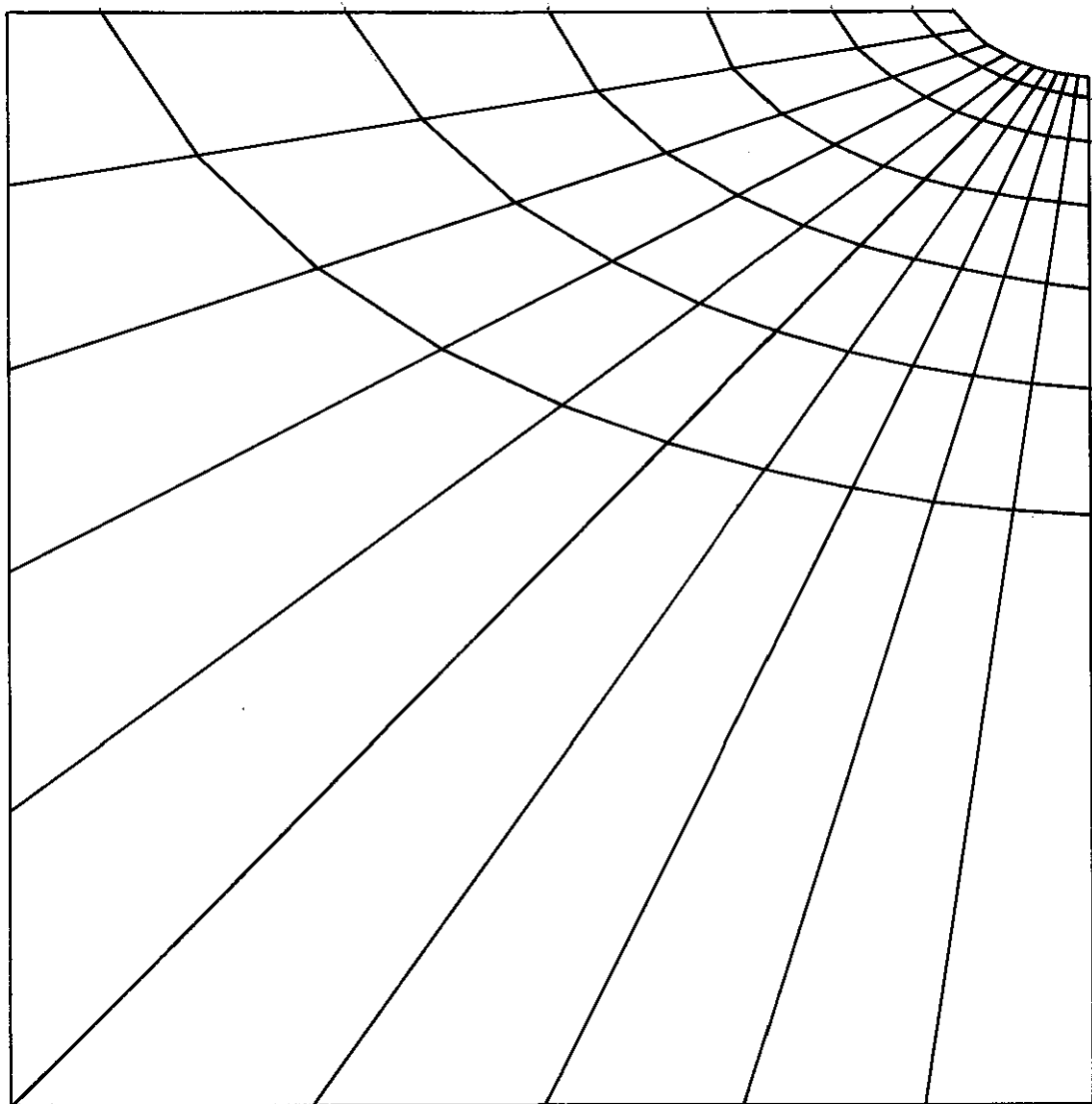
$$\mathcal{L} = 9^\circ$$

$$c = 1/15$$



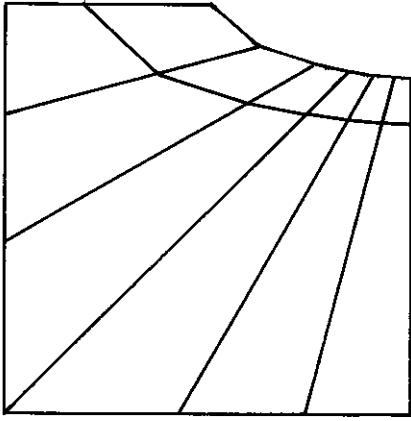
$$\mathcal{L} = 90^\circ$$

$$c = 1/25$$



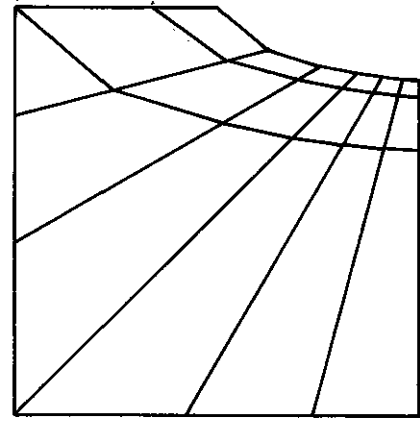
$\alpha = 9^\circ$

$c = 1/50$



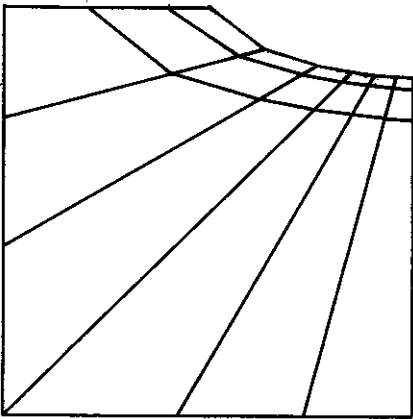
$\mathcal{L} = 15^\circ$

$c = 1/8$



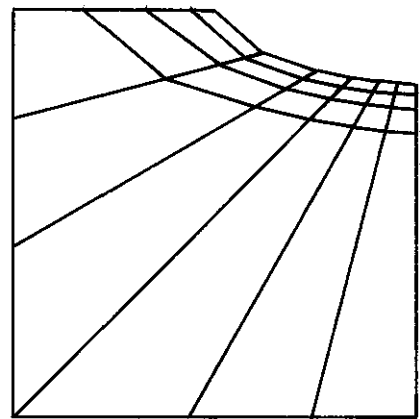
$\mathcal{L} = 15^\circ$

$c = 1/15$



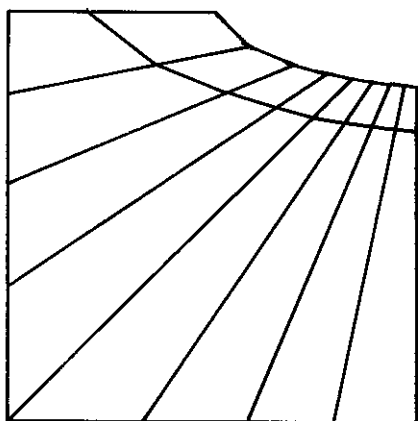
$\mathcal{L} = 15^\circ$

$c = 1/25$



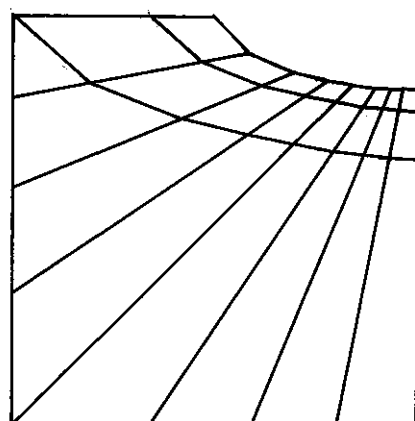
$\mathcal{L} = 15^\circ$

$c = 1/50$



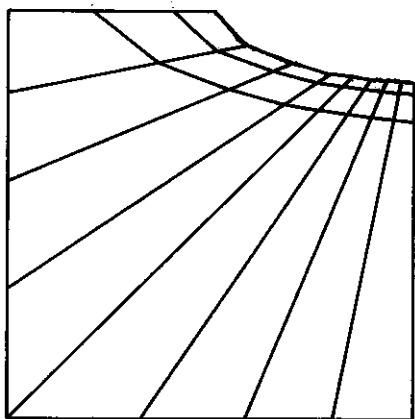
$\alpha = 11,25^\circ$

$c = 1/8$



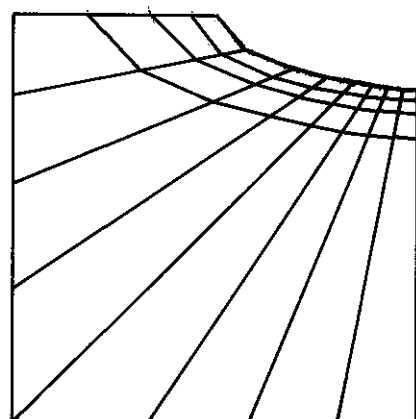
$\alpha = 11,25^\circ$

$c = 1/15$



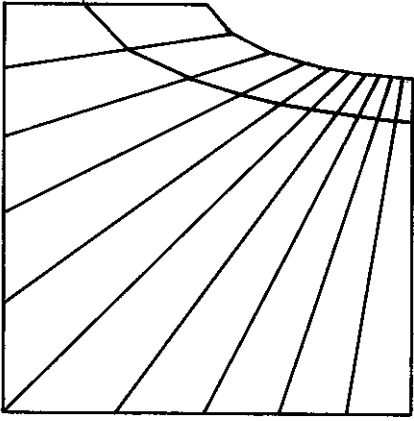
$\alpha = 11,25^\circ$

$c = 1/25$



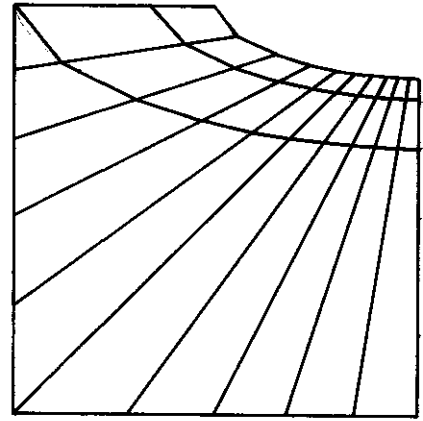
$\alpha = 11,25^\circ$

$c = 1/50$



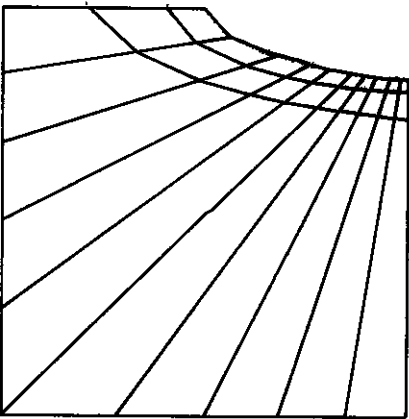
$\mathcal{L} = 9^\circ$

$c = 1/8$



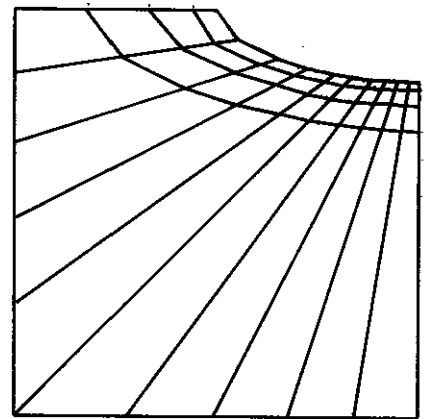
$\mathcal{L} = 9^\circ$

$c = 1/15$



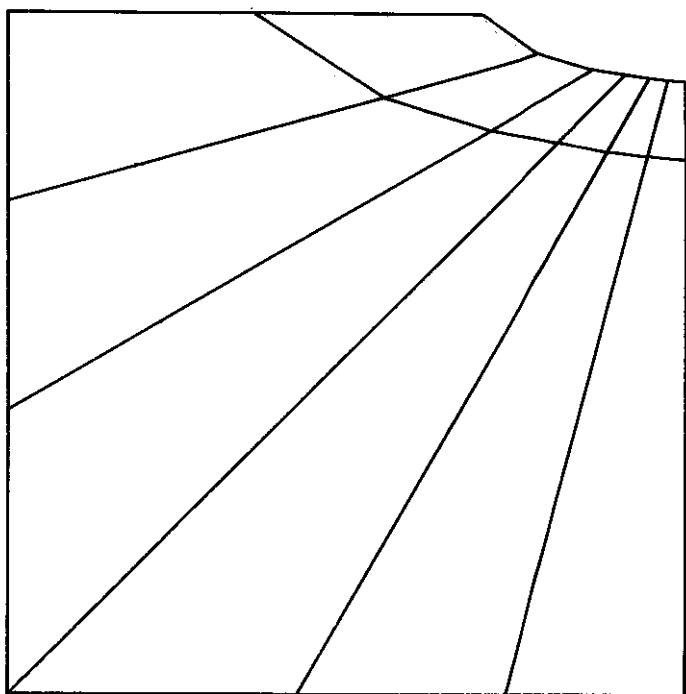
$\mathcal{L} = 9^\circ$

$c = 1/25$



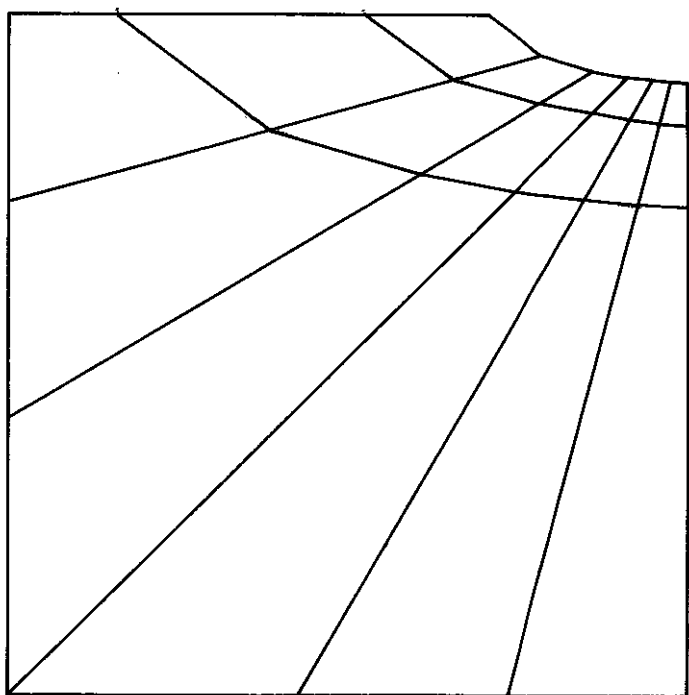
$\mathcal{L} = 9^\circ$

$c = 1/50$



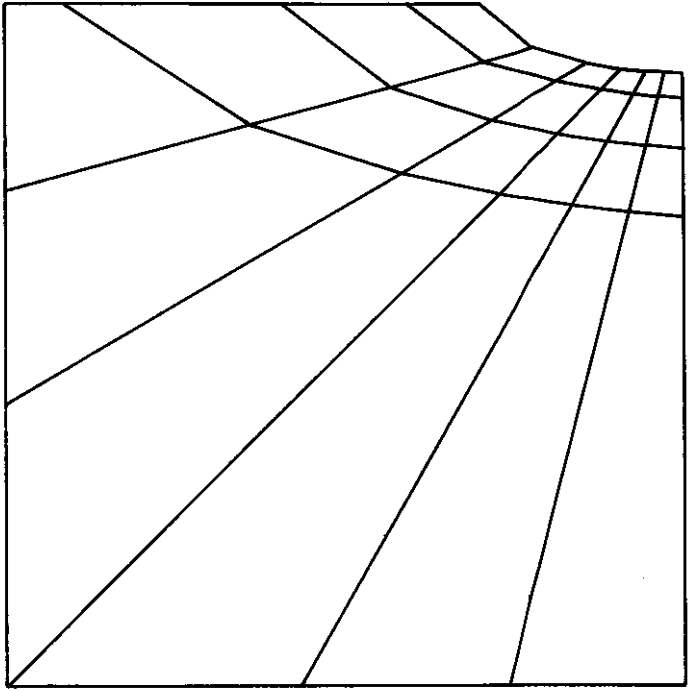
$$\mathcal{L} = 15^\circ$$

$$c = 1/8$$



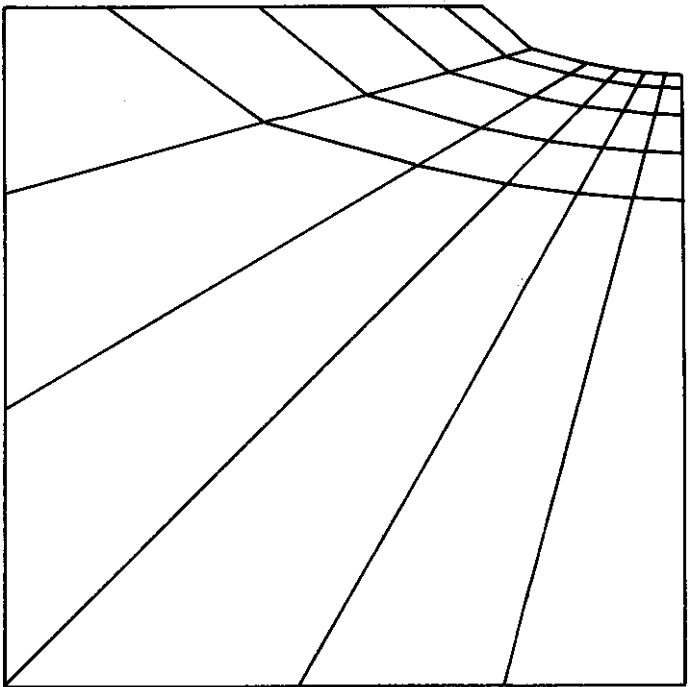
$$\mathcal{L} = 15^\circ$$

$$c = 1/15$$



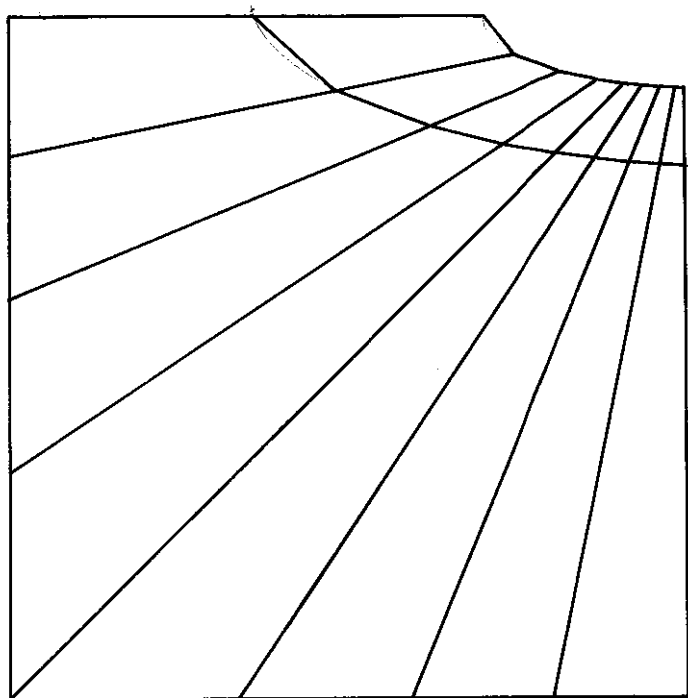
$\alpha = 15^\circ$

$c = 1/25$



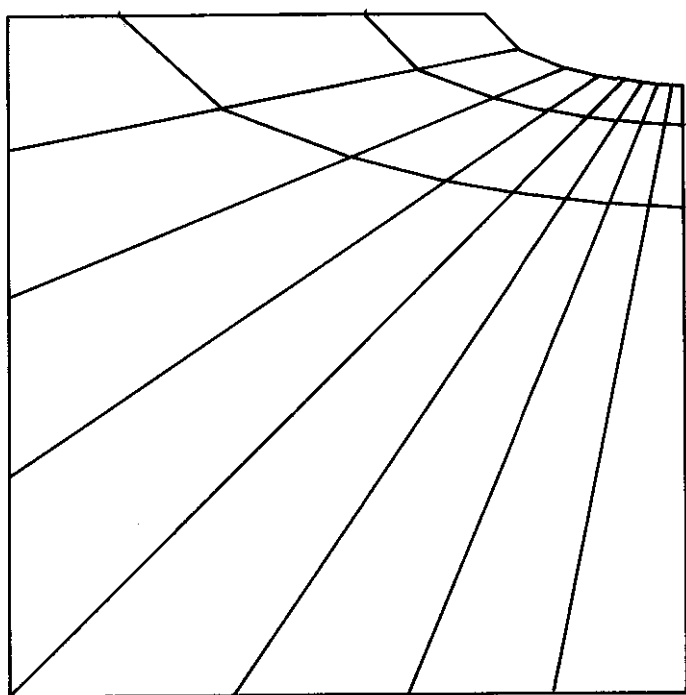
$\alpha = 15^\circ$

$c = 1/50$



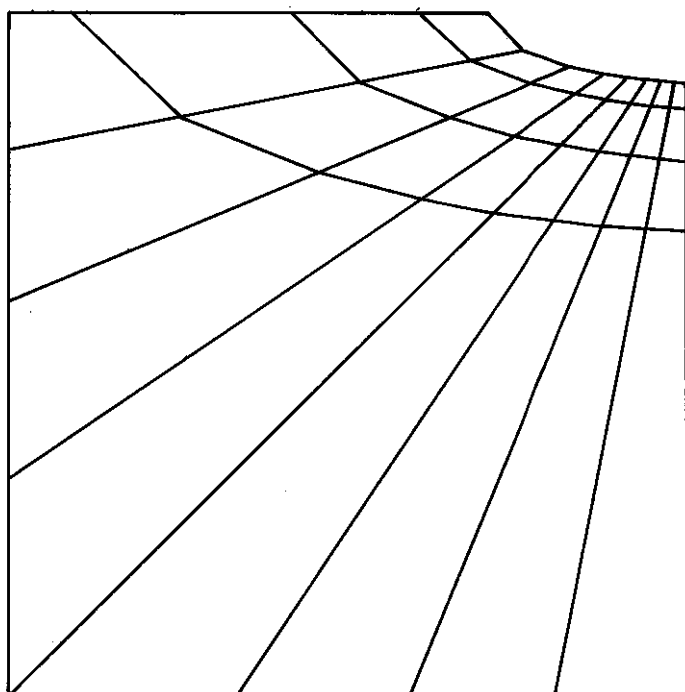
$$\alpha = 11,25^\circ$$

$$c = 1/8$$



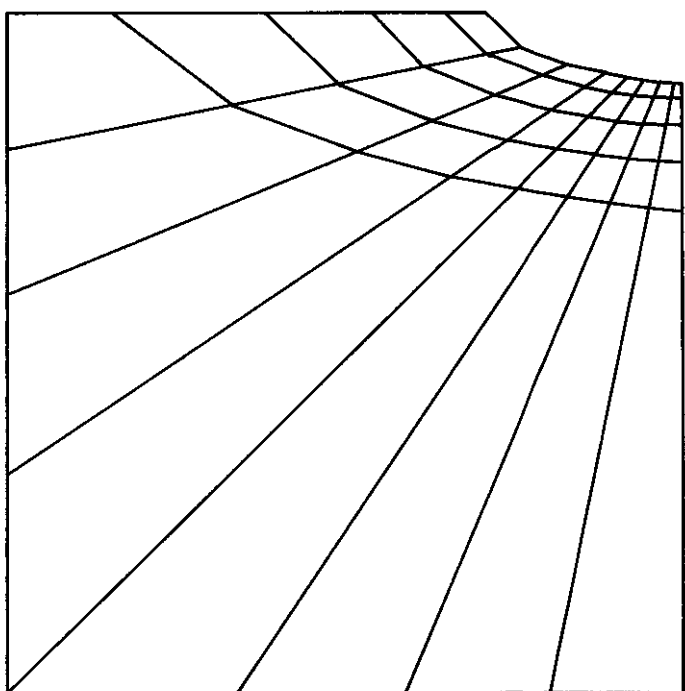
$$\alpha = 11,25^\circ$$

$$c = 1/15$$



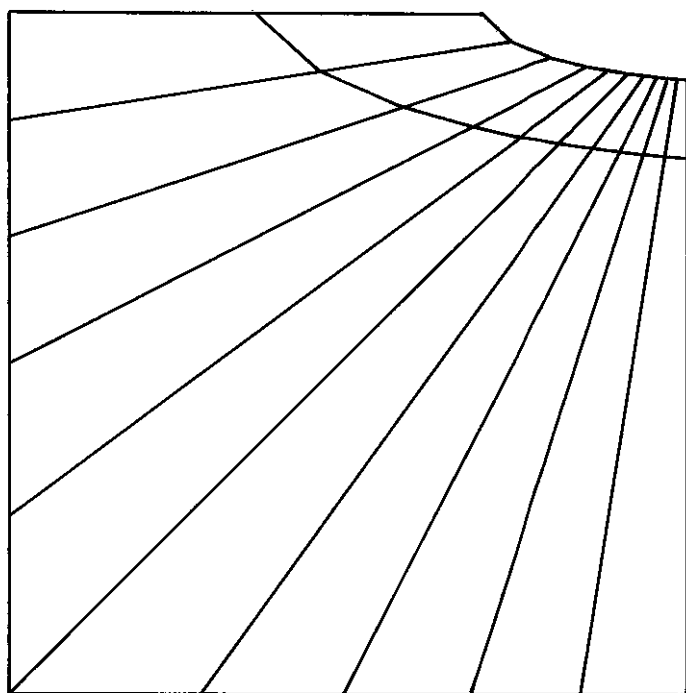
$\mathcal{L} = 11, 25^\circ$

$c = 1/25$



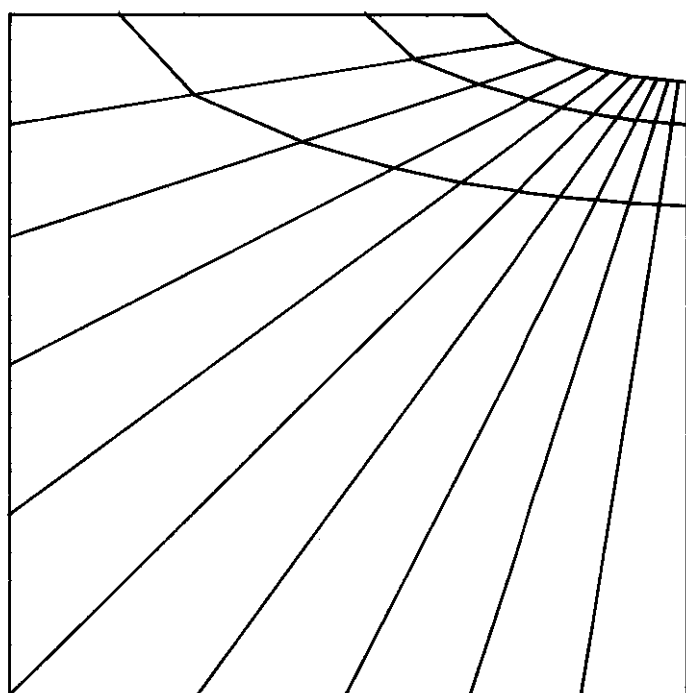
$\mathcal{L} = 11, 25^\circ$

$c = 1/50$



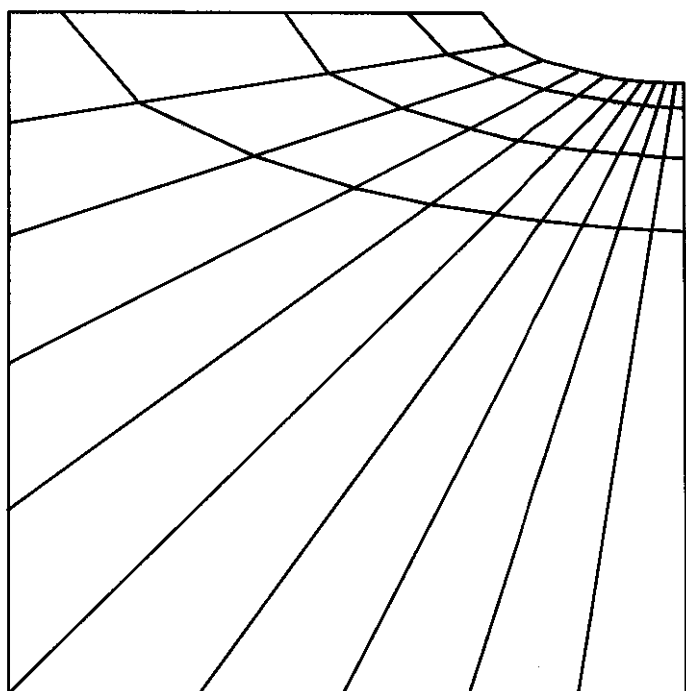
$\alpha = 90^\circ$

$c = 1/8$



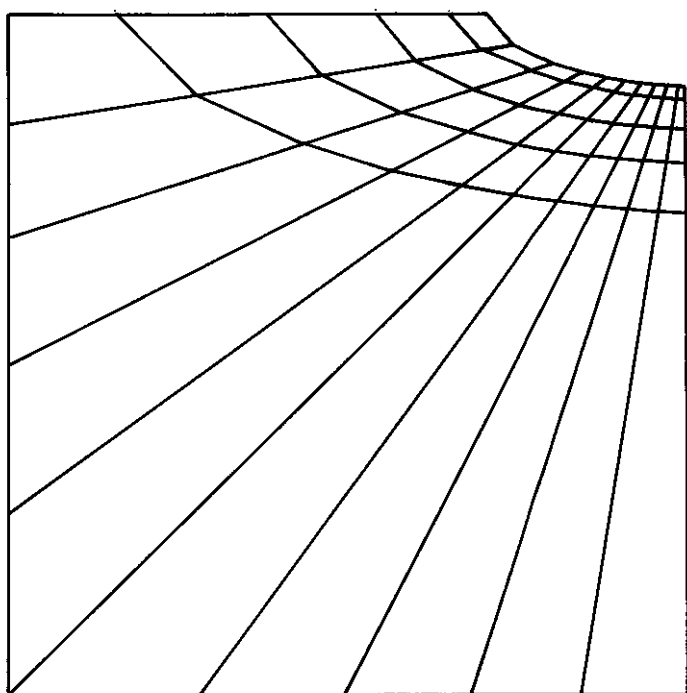
$\alpha = 90^\circ$

$c = 1/15$



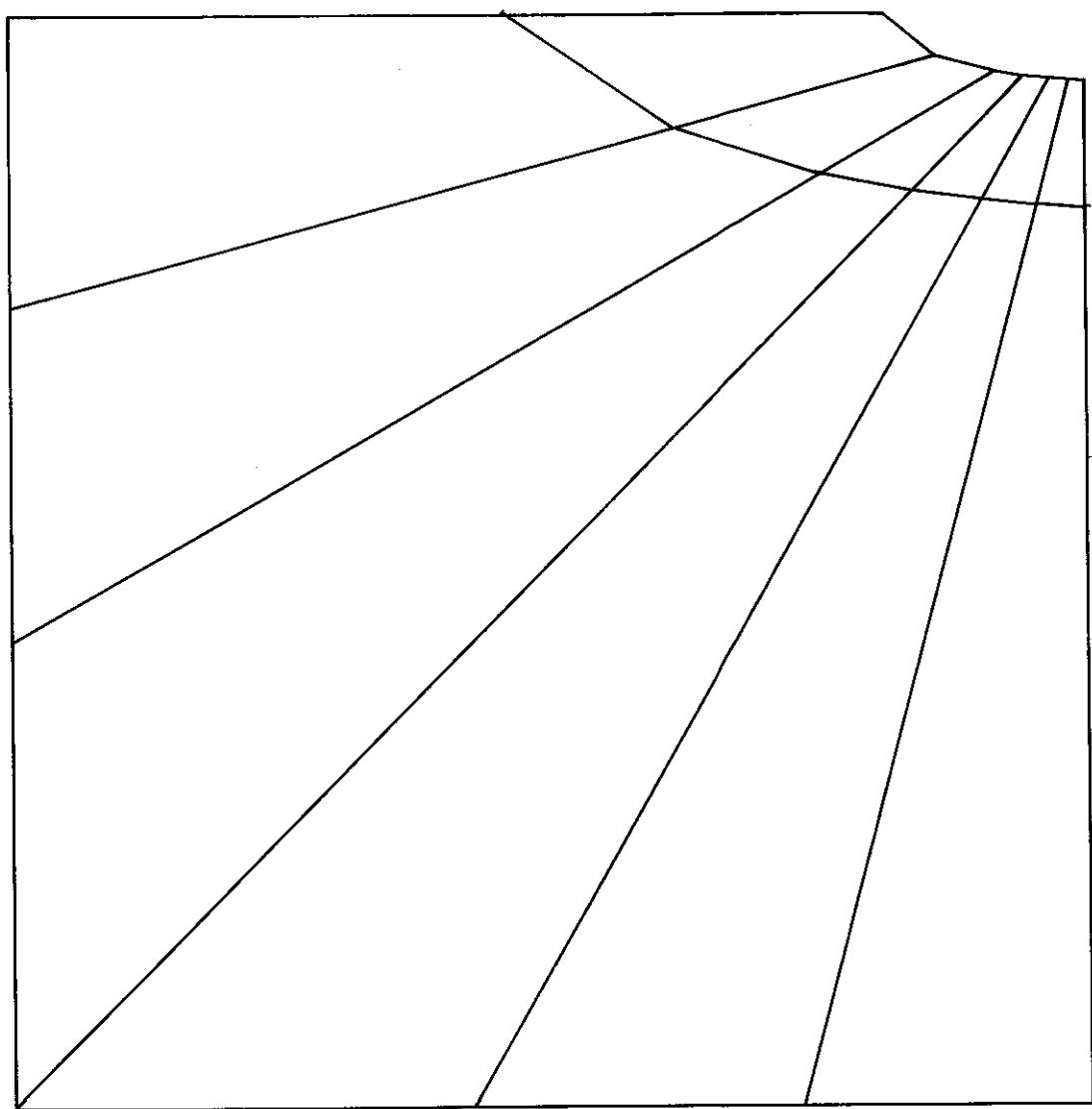
$\mathcal{L} = 9^\circ$

$c = 1/25$



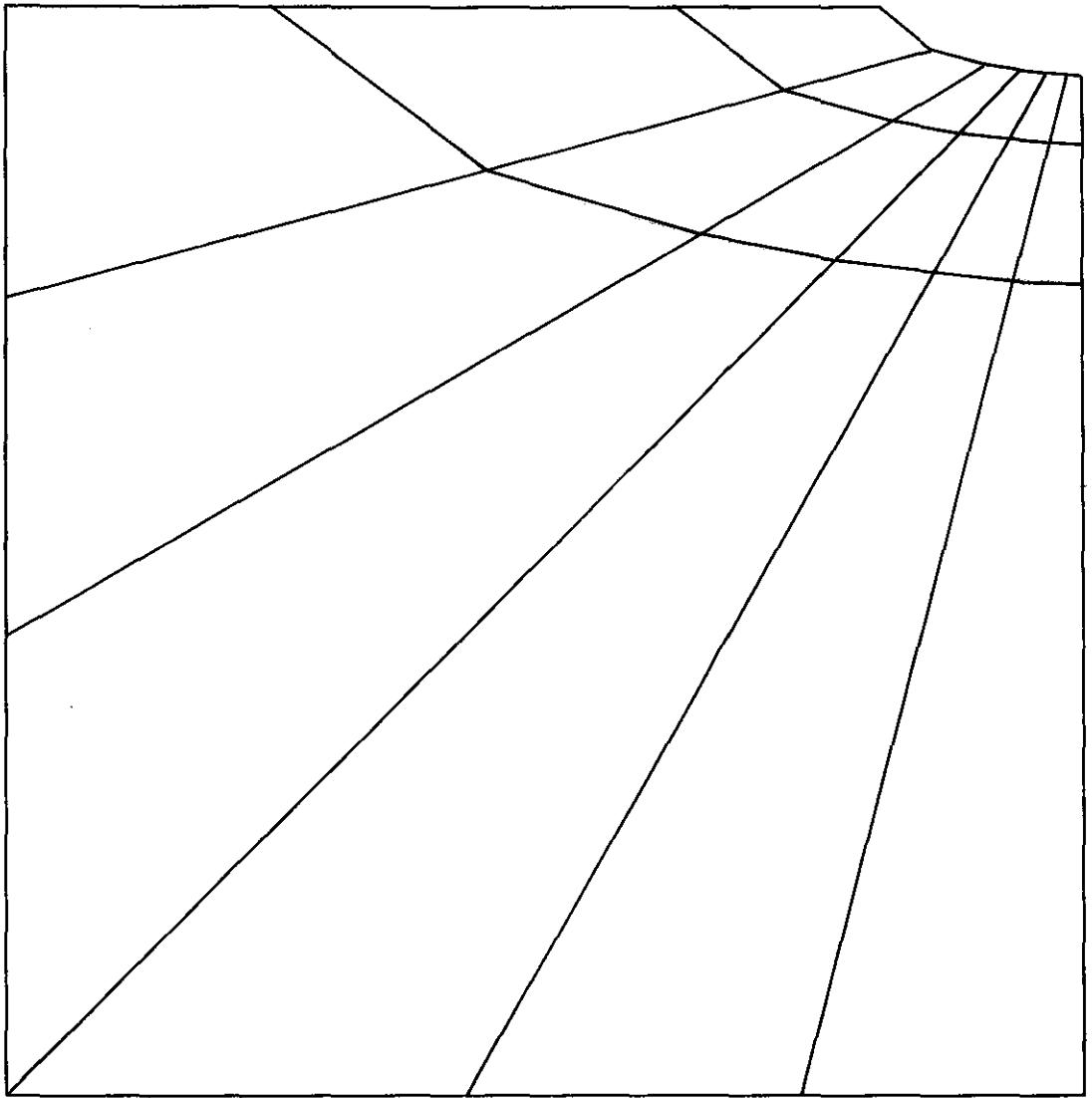
$\mathcal{L} = 9^\circ$

$c = 1/50$



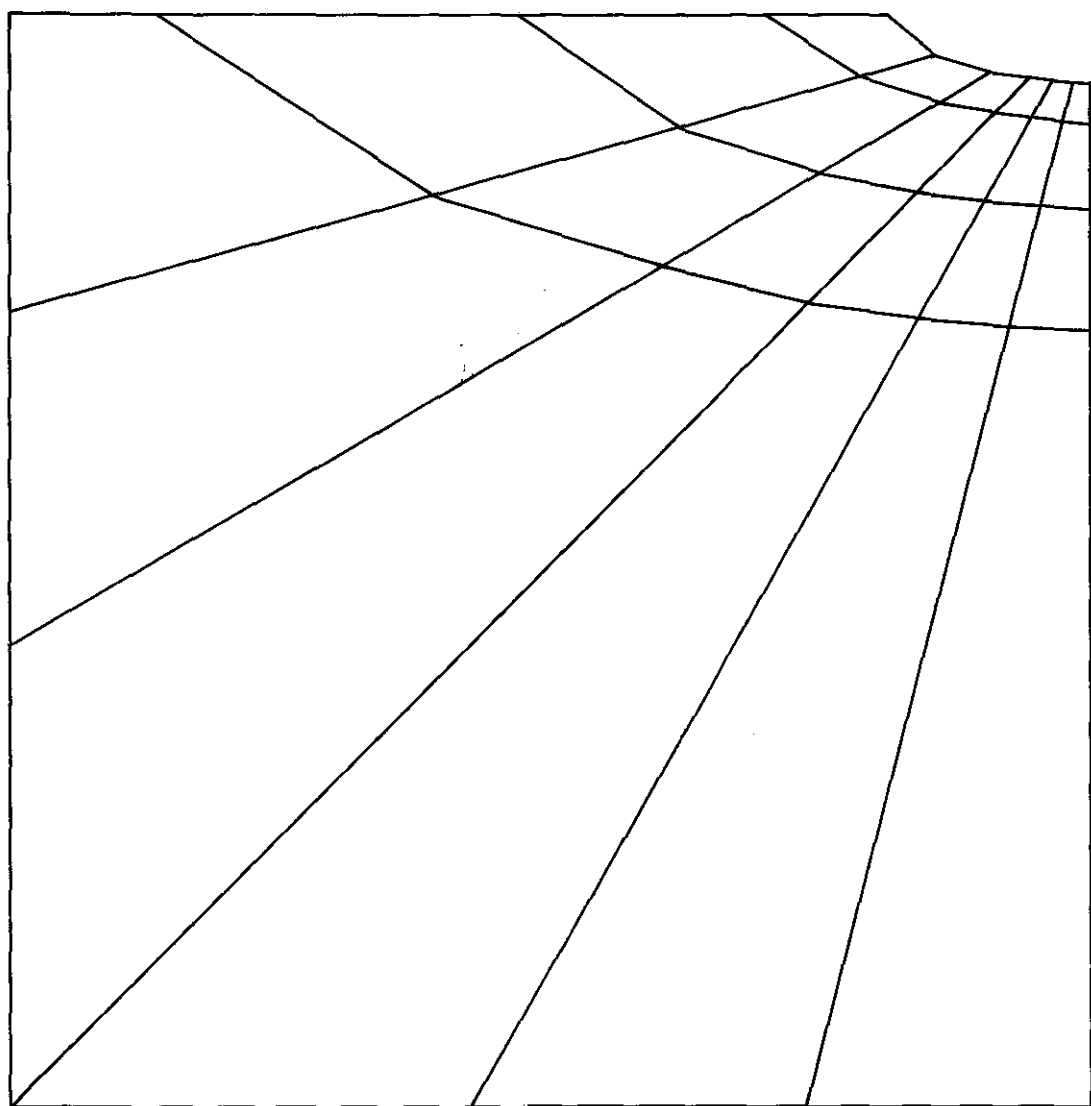
$$\mathcal{L} = 15^\circ$$

$$c = 1/8$$



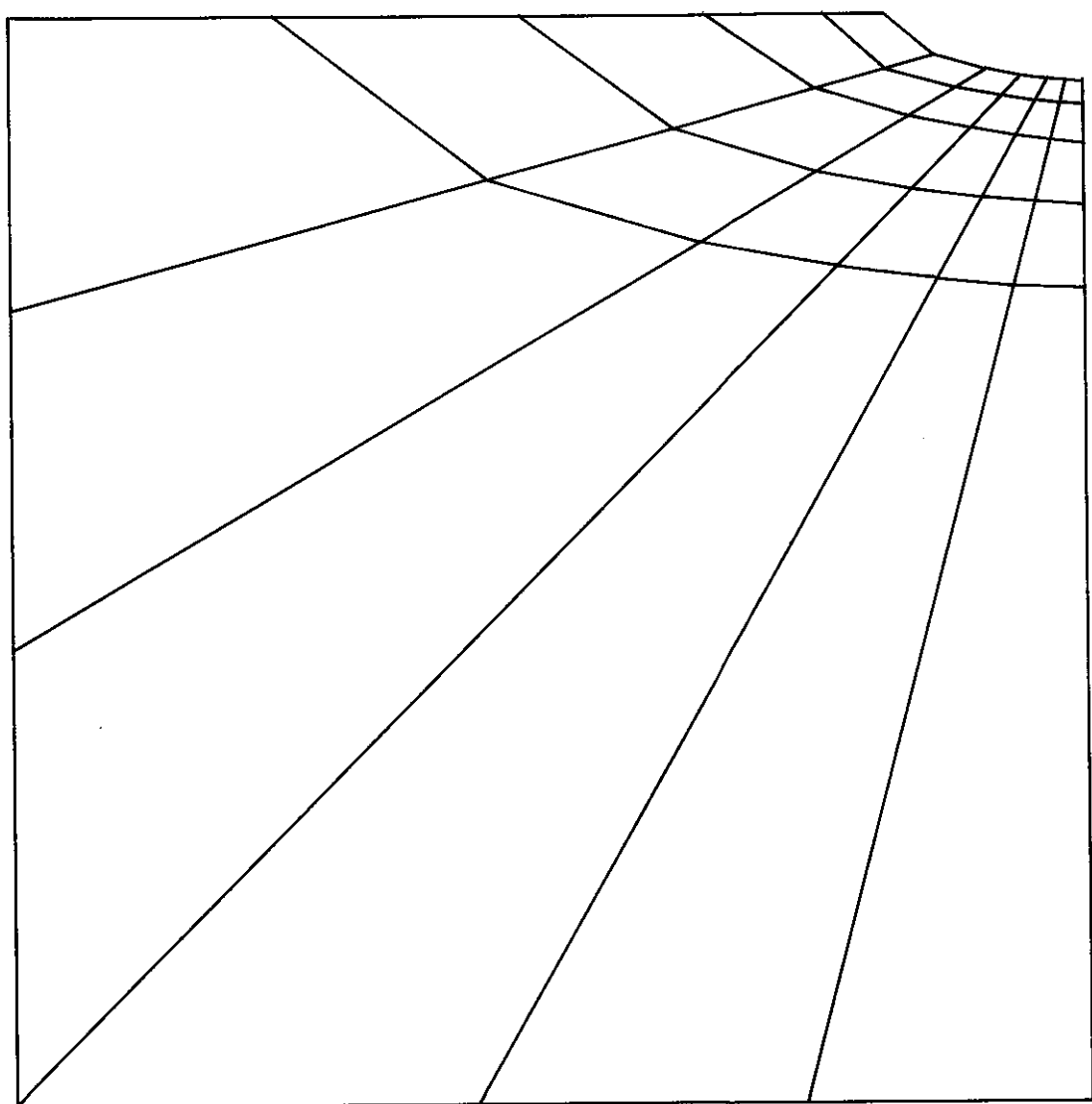
$\mathcal{L} = 15^\circ$

$c = 1/15$



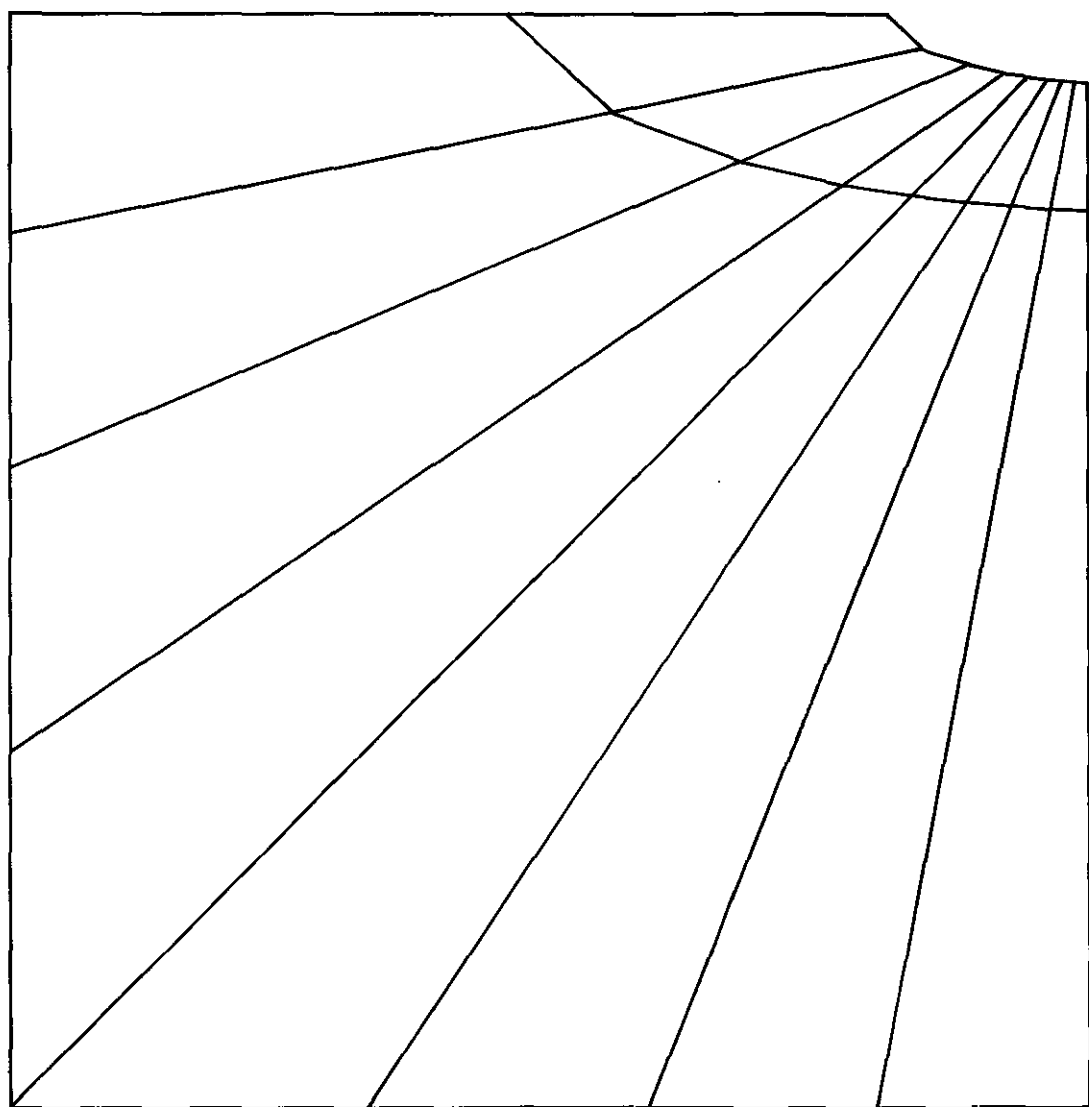
$$\alpha = 15^\circ$$

$$c = 1/25$$



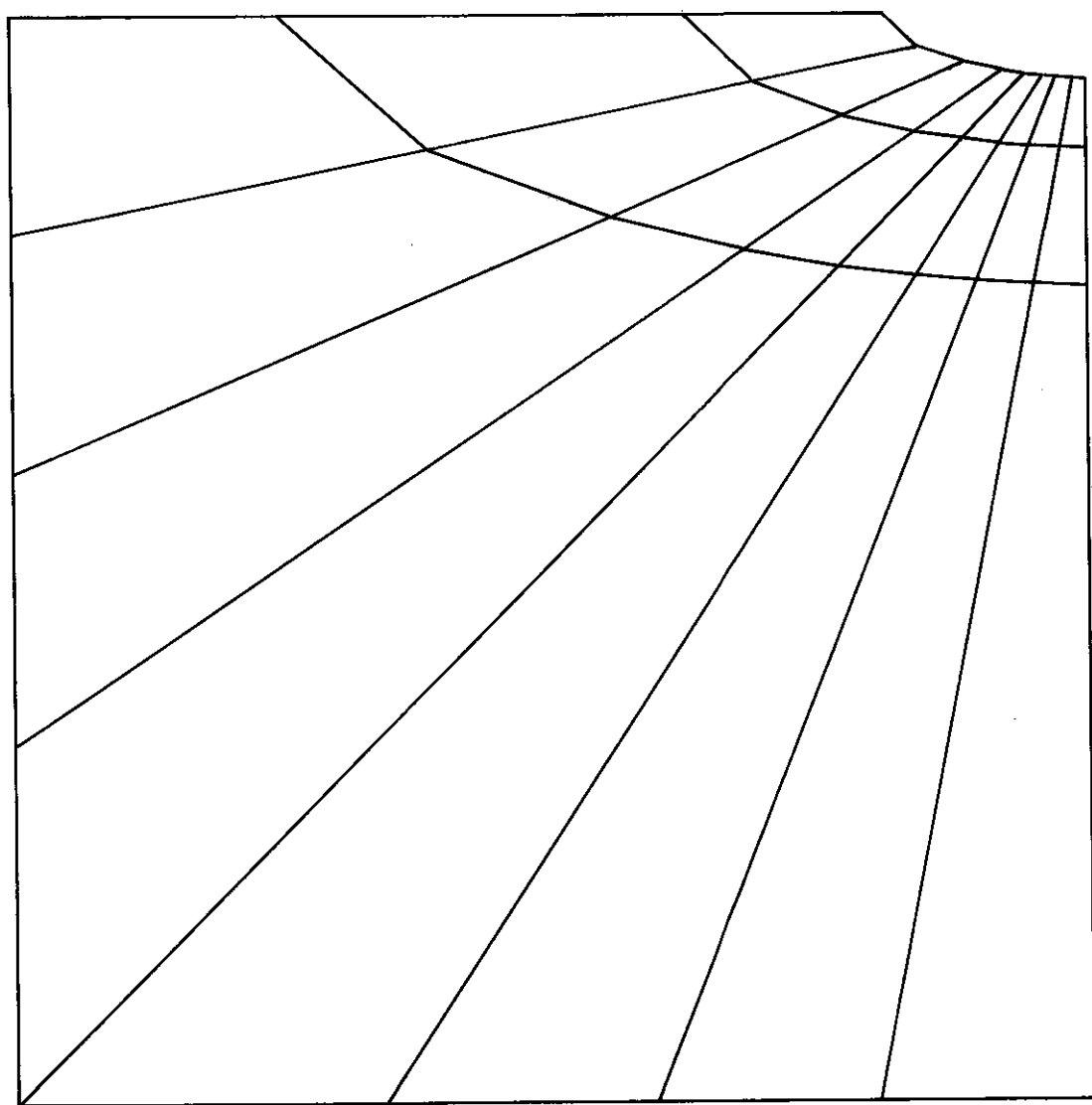
$\alpha = 15^\circ$

$c = 1 / 50$



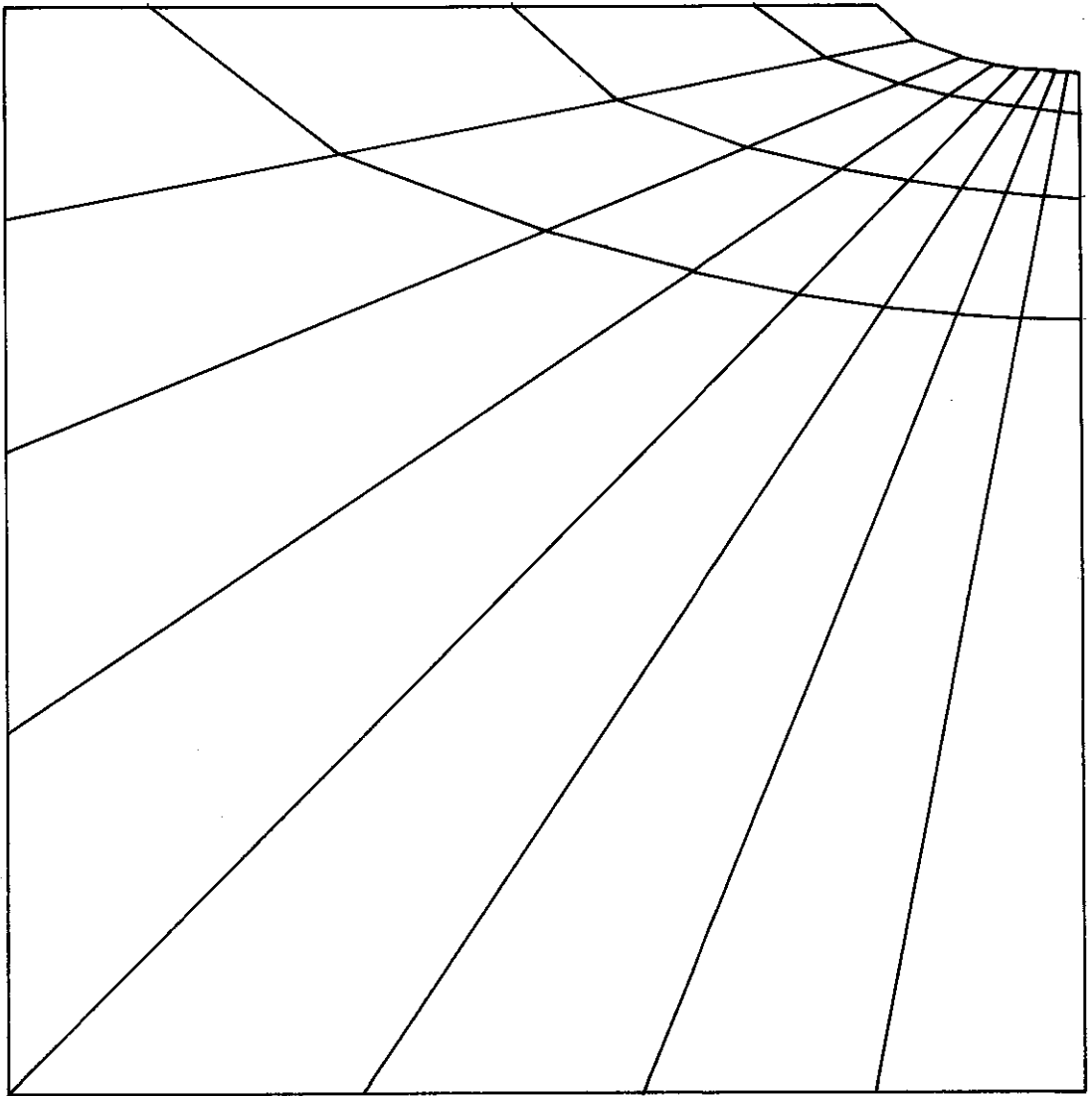
$$\mathcal{L} = 11,25^\circ$$

$$c = 1/8$$



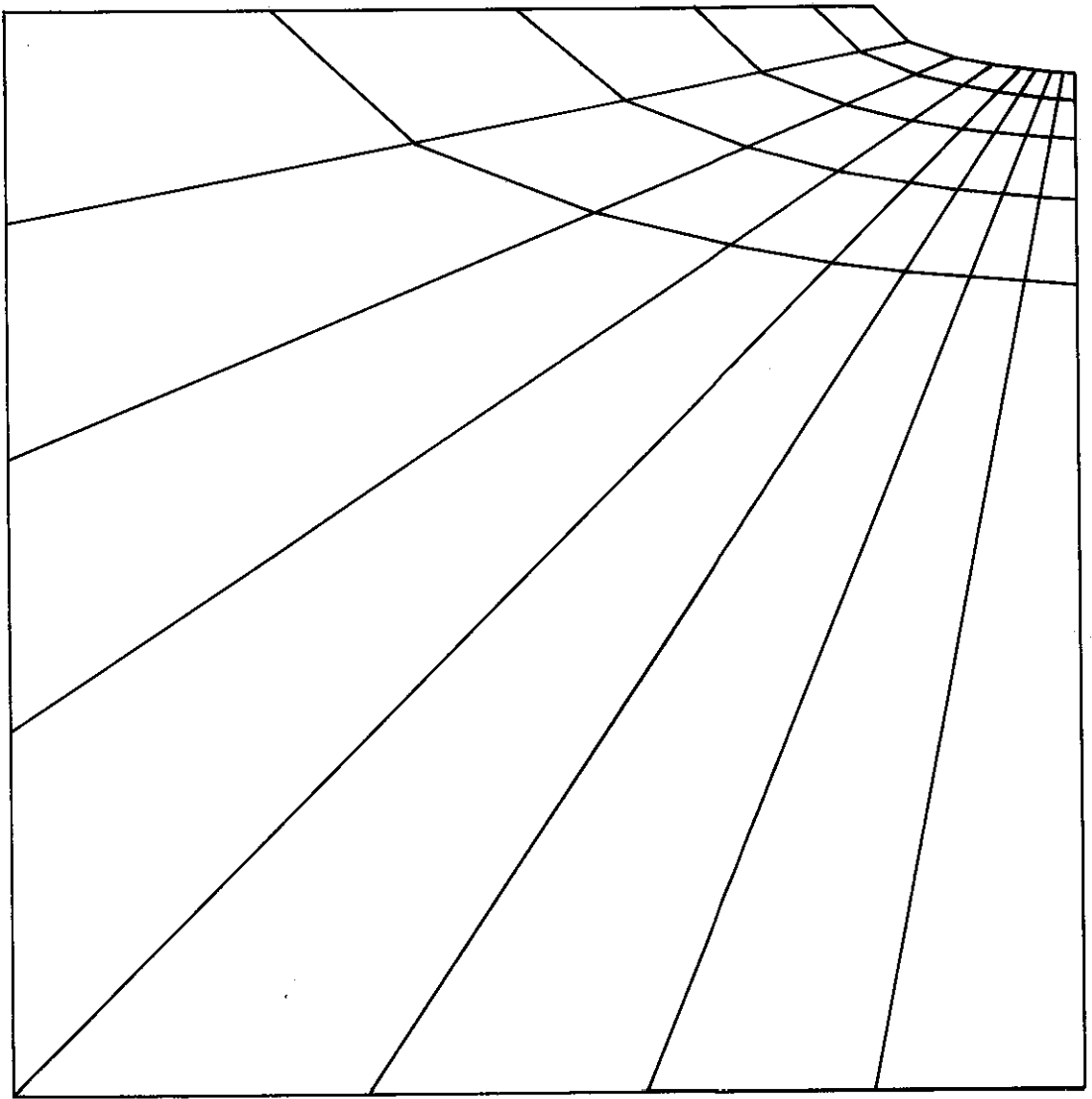
$$\mathcal{L} = 11,25^\circ$$

$$c = 1/15$$



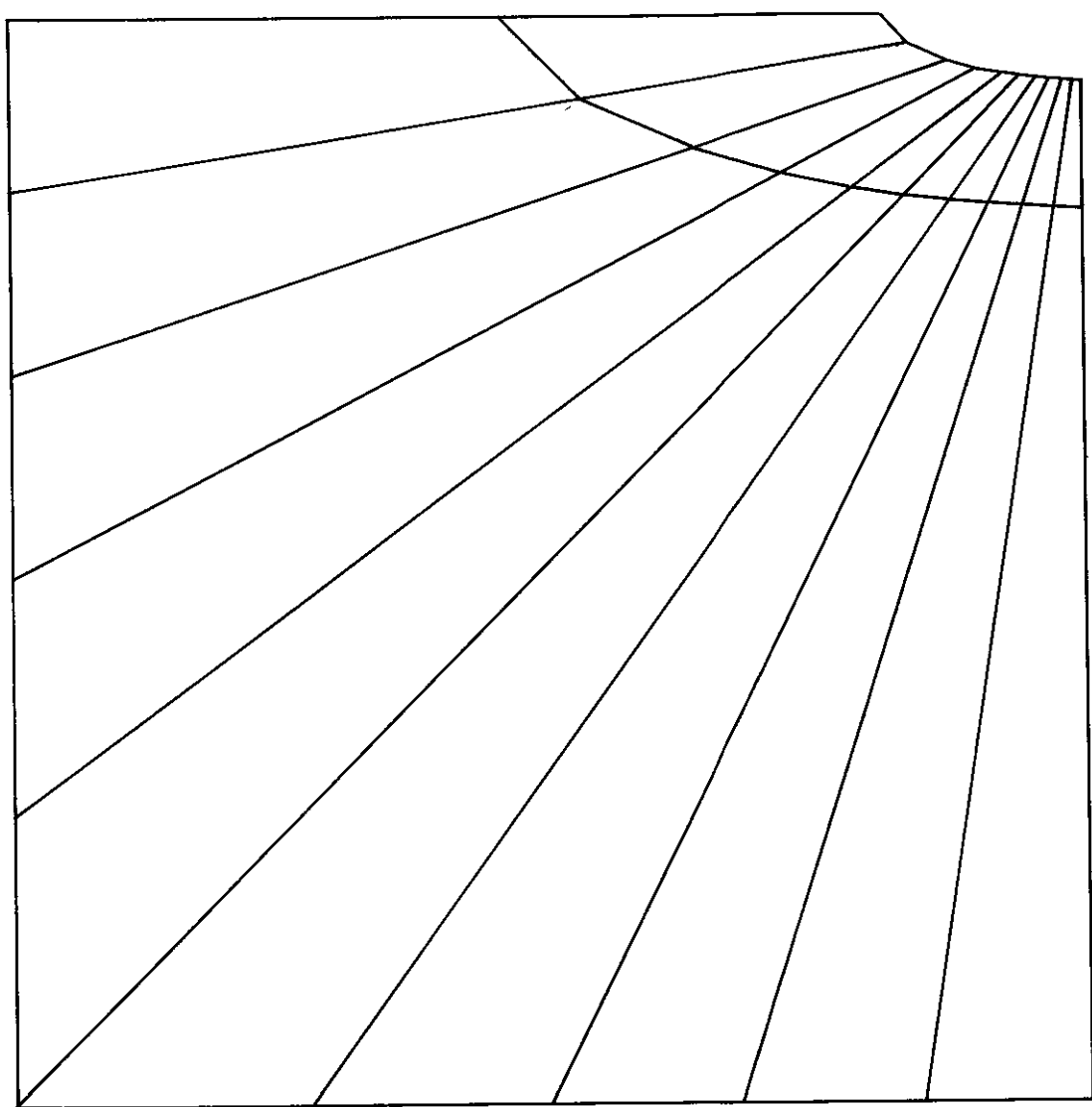
$\alpha = 11,25^\circ$

$c = 1/25$



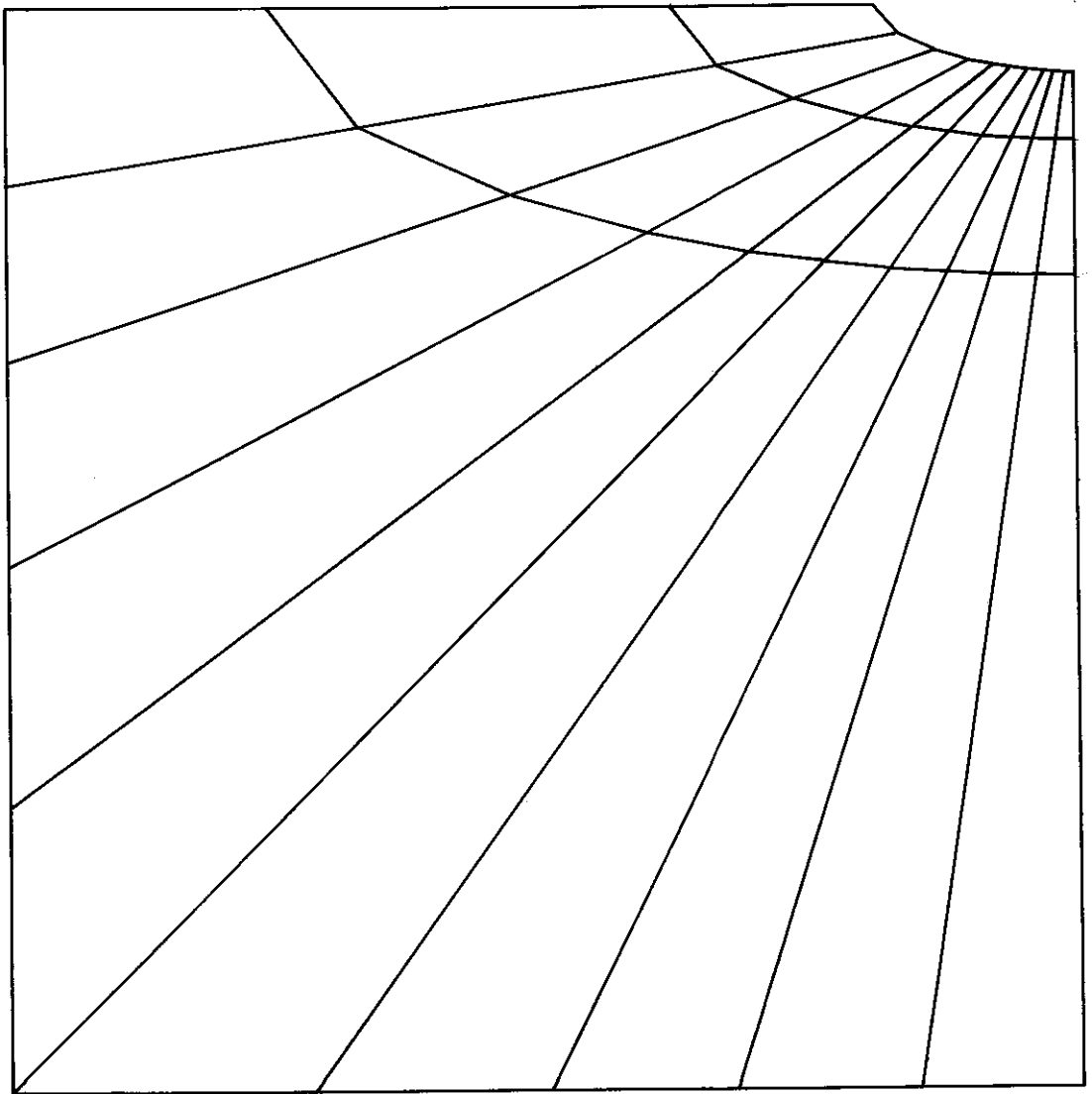
$\alpha = 11,25^\circ$

$c = 1/50$



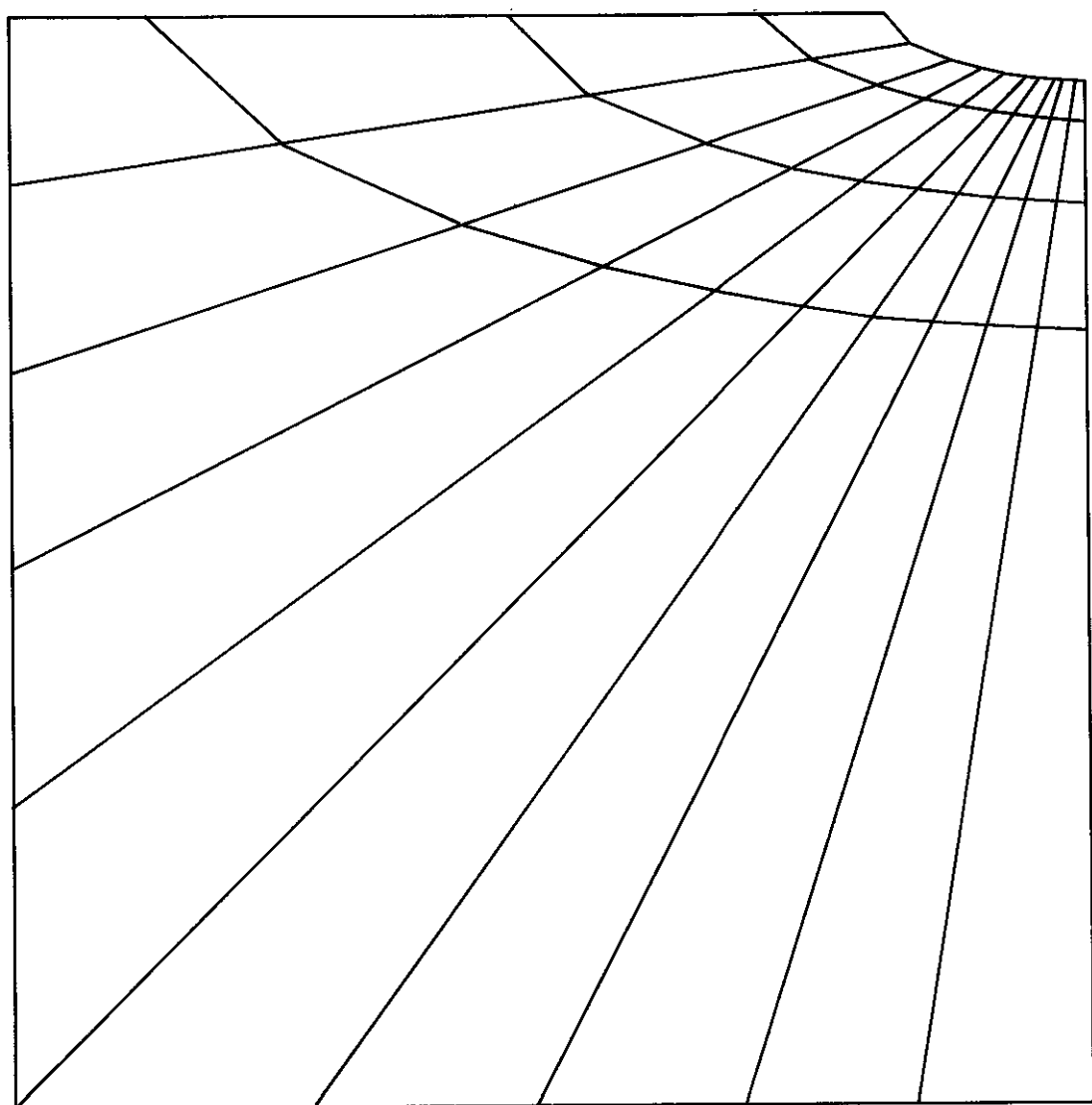
$\mathcal{L} = 9^\circ$

$c = 1/8$



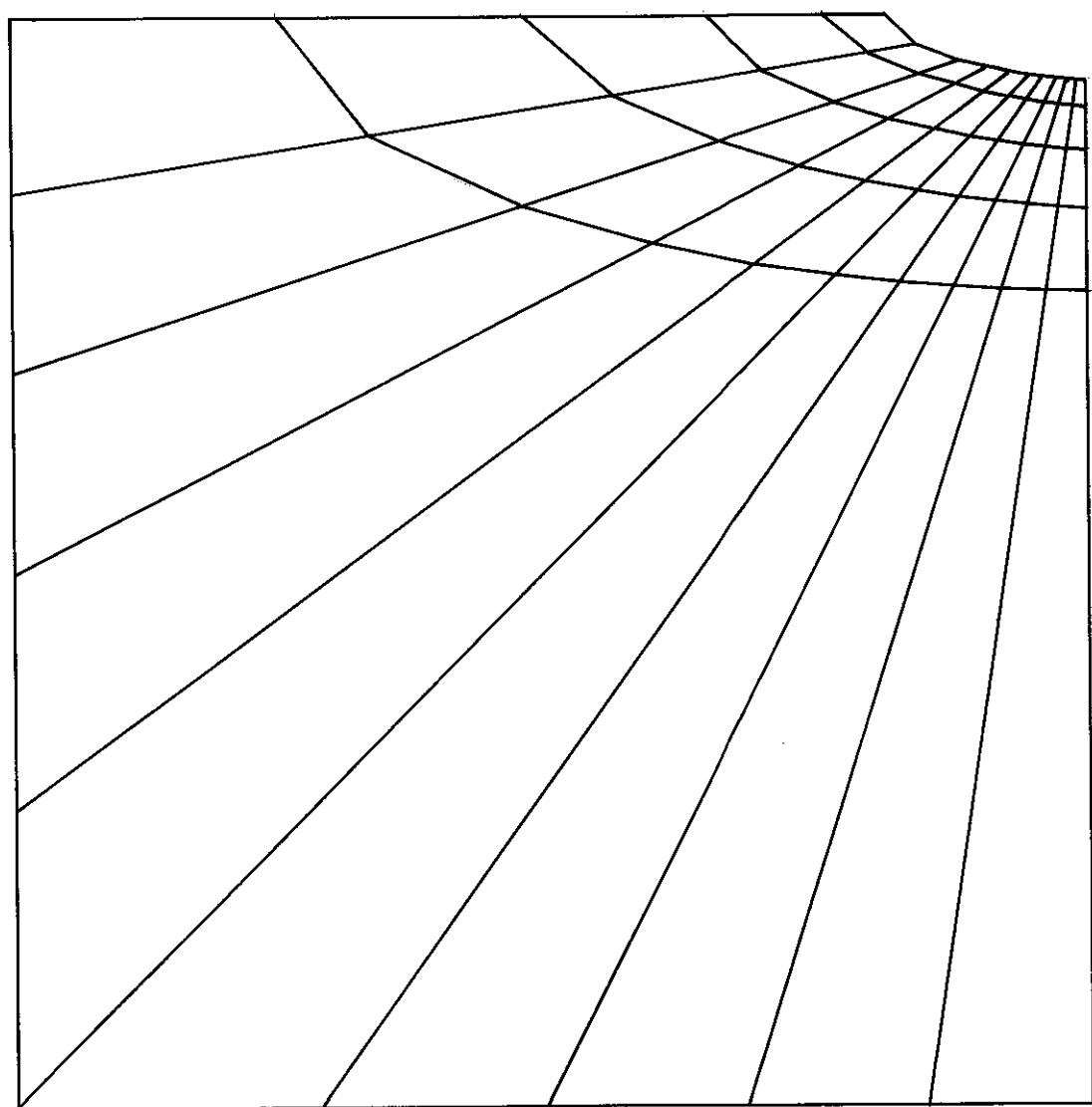
$$\mathcal{L} = 9^\circ$$

$$c = 1/15$$



$\mathcal{L} = 90^\circ$

$c = 1/25$



$\angle = 90^\circ$

$c = 1/50$

	$c = 1/8$	$c = 1/15$	$c = 1/25$	$c = 1/50$
α	$a/l = 1/6$ $a = 0,30$ $l = 1,80$			
9.00^0	$513,0 \times 10^3$	$520,9 \times 10^3$	$522,3 \times 10^3$	$518,3 \times 10^3$
11.25^0	$511,7 \times 10^3$	$519,7 \times 10^3$	$521,1 \times 10^3$	$518,2 \times 10^3$
15.00^0	-	-	-	-
	$a/l = 1/10$ $a = 0,30$ $l = 3,00$			
9.00^0	$463,4 \times 10^3$	$488,0 \times 10^3$	$491,6 \times 10^3$	$489,3 \times 10^3$
11.25^0	$462,7 \times 10^3$	$487,1 \times 10^3$	$490,8 \times 10^3$	$488,6 \times 10^3$
15.00^0	$461,0 \times 10^3$	$485,3 \times 10^3$	$489,2 \times 10^3$	$487,1 \times 10^3$
	$a/l = 1/16$ $a = 0,30$ $l = 4,80$			
9.00^0	$430,1 \times 10^3$	$463,5 \times 10^3$	$478,5 \times 10^3$	$481,0 \times 10^3$
11.25^0	$429,7 \times 10^3$	$462,9 \times 10^3$	$477,8 \times 10^3$	$480,5 \times 10^3$
15.00^0	$428,8 \times 10^3$	$461,4 \times 10^3$	$476,3 \times 10^3$	$479,3 \times 10^3$

TENSÕES MÁXIMAS PARA CHAPA COM FURO ELIPTICO

 $a/b = 2/3$

TAB. (IV.2)

	$c = 1/8$	$c = 1/15$	$c = 1/25$	$c = 1/50$
α	$a/l = 1/6$		$a = 0,30$ $l = 1,80$	
9.00^0	$465,0 \times 10^3$	$462,0 \times 10^3$	$457,7 \times 10^3$	$457,0 \times 10^3$
11.25^0	$463,9 \times 10^3$	$461,2 \times 10^3$	$457,1 \times 10^3$	$453,6 \times 10^3$
15.00^0	$461,8 \times 10^3$	$459,8 \times 10^3$	$455,7 \times 10^3$	$454,8 \times 10^3$
	$a/l = 1/10$		$a = 0,30$ $l = 3,00$	
9.00^0	$423,1 \times 10^3$	$429,7 \times 10^3$	$428,1 \times 10^3$	$422,9 \times 10^3$
11.25^0	$422,6 \times 10^3$	$429,5 \times 10^3$	$427,9 \times 10^3$	$422,9 \times 10^3$
15.00^0	$421,4 \times 10^3$	$428,8 \times 10^3$	$427,6 \times 10^3$	$422,7 \times 10^3$
	$a/l = 1/16$		$a = 0,30$ $l = 4,80$	
9.00^0	$399,6 \times 10^3$	$471,4 \times 10^3$	$420,2 \times 10^3$	$415,3 \times 10^3$
11.25^0	$400,1 \times 10^3$	$417,1 \times 10^3$	$420,1 \times 10^3$	$415,4 \times 10^3$
15.00^0	$398,7 \times 10^3$	$416,4 \times 10^3$	$419,8 \times 10^3$	$415,5 \times 10^3$

TENSÕES MÁXIMAS PARA CHAPA COM FURO ELIPTICO

$$a/b = 1/2$$

TAB. (IV.3)

	$c = 1/8$	$c = 1/15$	$c = 1/25$	$c = 1/50$
α	$a/l = 1/6$ $a = 0,30$ $l = 1,80$			
9.00^0	$420,3 \times 10^3$	$409,4 \times 10^3$	$404,8 \times 10^3$	$402,2 \times 10^3$
11.25^0	$418,7 \times 10^3$	$408,0 \times 10^3$	$403,8 \times 10^3$	$401,2 \times 10^3$
15.00^0	$415,3 \times 10^3$	$405,0 \times 10^3$	$402,4 \times 10^3$	$399,7 \times 10^3$
	$a/l = 1/10$ $a = 0,30$ $l = 3,00$			
9.00^0	$374,9 \times 10^3$	$368,7 \times 10^3$	$362,3 \times 10^3$	$359,1 \times 10^3$
11.25^0	$374,7 \times 10^3$	$368,9 \times 10^3$	$362,6 \times 10^3$	$359,4 \times 10^3$
15.00^0	$374,3 \times 10^3$	$369,4 \times 10^3$	$363,3 \times 10^3$	$360,1 \times 10^3$
	$a/l = 1/16$ $a = 0,30$ $l = 4,80$			
9.00^0	$360,4 \times 10^3$	$360,9 \times 10^3$	$355,9 \times 10^3$	$348,8 \times 10^3$
11.25^0	$360,4 \times 10^3$	$361,1 \times 10^3$	$356,6 \times 10^3$	$349,3 \times 10^3$
15.00^0	$360,3 \times 10^3$	$361,6 \times 10^3$	$357,4 \times 10^3$	$350,5 \times 10^3$

TENSÕES MÁXIMAS PARA CHAPA COM FURO ELIPTICO

 $a/b = 1/3$

TAB. (IV.4)

CAPÍTULO V - COMPARAÇÃO DE RESULTADOS

CAPÍTULO V

COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS

V.1 - Curvas de Convergência

V.1.1 - Furo Circular

A partir dos resultados apresentados na Tabela (IV.1) pode-se plotar, para cada valor de r/l , o gráfico Resultado \times nº de elementos, obtendo-se assim a curva de convergência do elemento para cada ângulo adotado neste estudo, indicada nos gráficos (V.1) a (V.3).

Como se pode notar, a medida que se refinava a malha, o resultado aumentava, caracterizando uma convergência "por baixo", como a indicada na Fig (IV.1a). Para que se chegasse ao resultado final da aplicação do método em questão, traçou-se, com o auxílio de papel transparente, uma curva de convergência global, tangenciando o conjunto de curvas relativas aos diversos ângulos α , mostradas nos gráficos já citados. Esta última curva era também convergente para um determinado valor, que foi adotado como resultado correto, conseguindo-se assim fugir das diferenças oriundas de um refinamento maior ou menor da ma

1ha. Estas curvas de convergência global foram plotadas nos gráficos (V.4) a (V.6), e delas obtiveram-se os valores abaixo:

r/l	VALOR DA CONVERGÊNCIA (Kg/cm ²)	MALHA DE MELHOR RESULTADO	
		α	a
1/6	650×10^3	9 ⁰	1/50
1/10	620×10^3	9 ⁰	1/50
1/14	611×10^3	9 ⁰	1/100

RESULTADOS DE CONVERGÊNCIA GLOBAL

TABELA (V.1)

De posse dos valores acima pode-se estudar a influência dos contornos laterais nas tensões desenvolvidas no furo, traçando-se a curva Tensão x relação r/l, da qual se dispõe de 03 pontos. Lançando mão dos resultados até então obtidos e analisando-os, pode-se verificar que o valor de convergência era praticamente o dado pelas malhas indicadas nas duas últimas colunas da Tabela (V.1) e sendo assim pôde-se conseguir, de uma maneira rápida, resultados para outras relações r/l, conforme a Tabela (V.2).

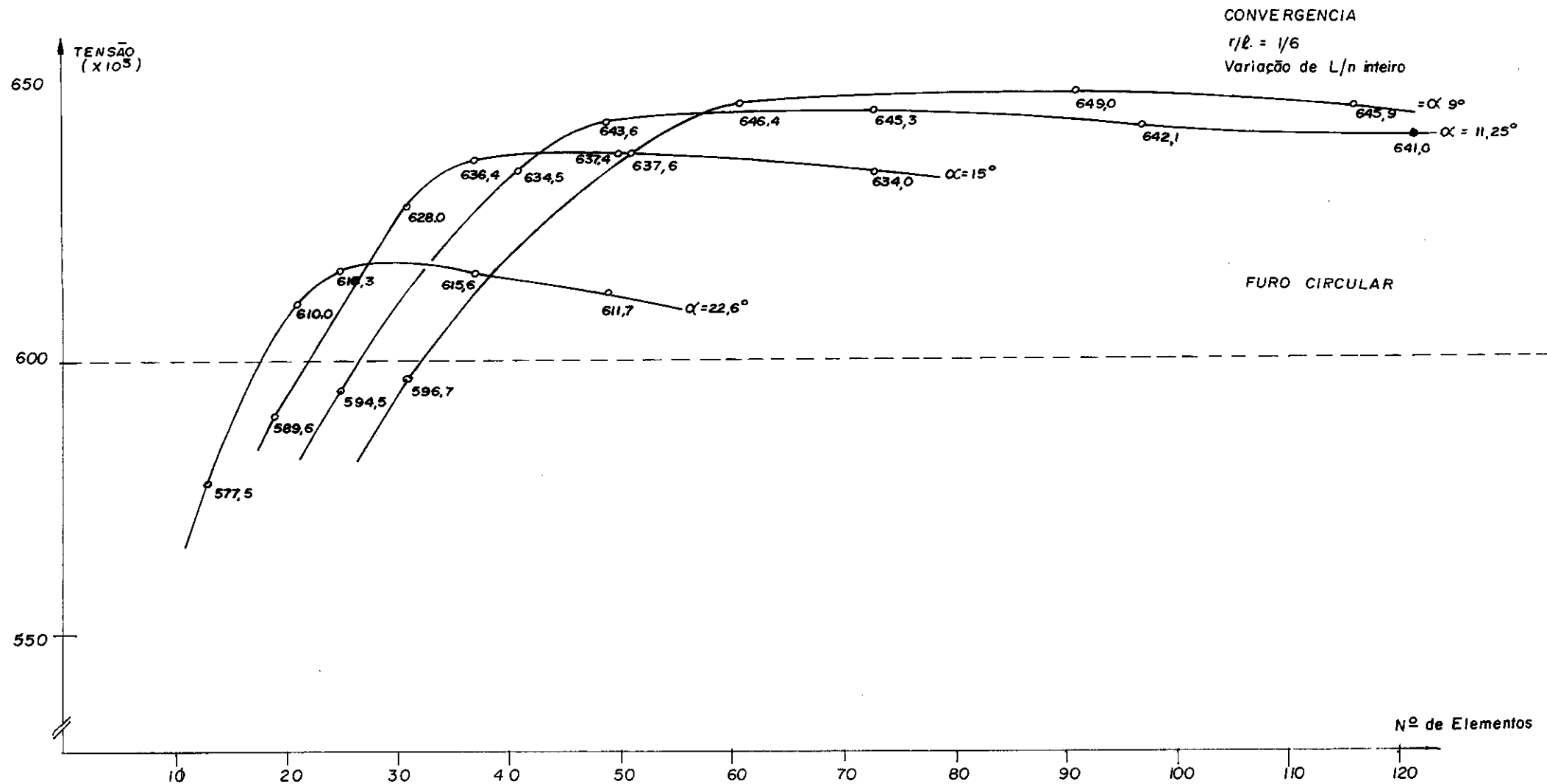


GRÁFICO V 1

TENSÃO
($\times 10^3$)

CONVERGÊNCIA $\frac{r}{l} = \frac{1}{10}$

VARIAÇÃO DE L/n^2 inte.

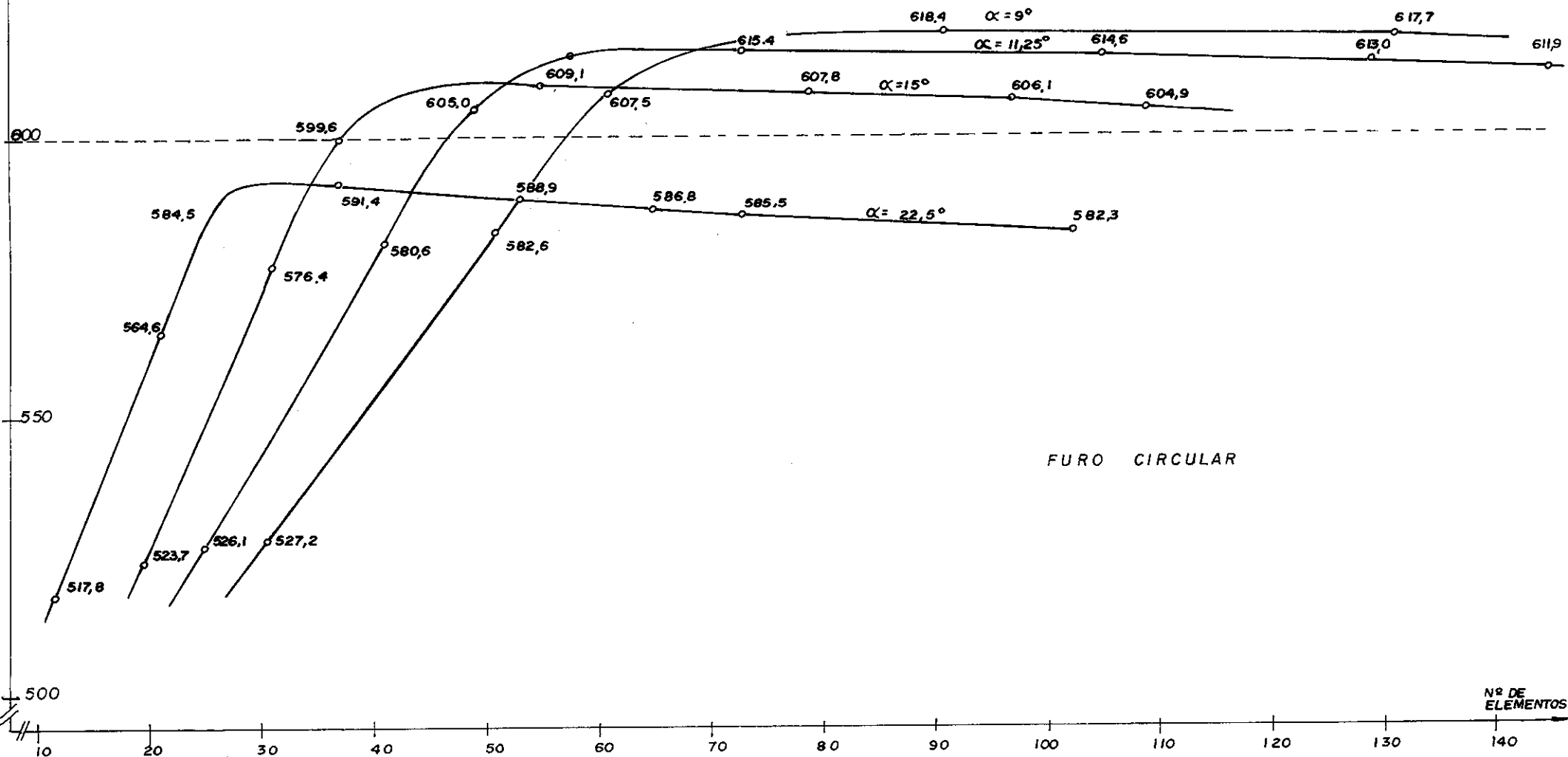


GRÁFICO V-2

TENSÃO

 $(\times 10^3)$

CONVERGÊNCIA

$$\frac{r}{L} = \frac{1}{14}$$

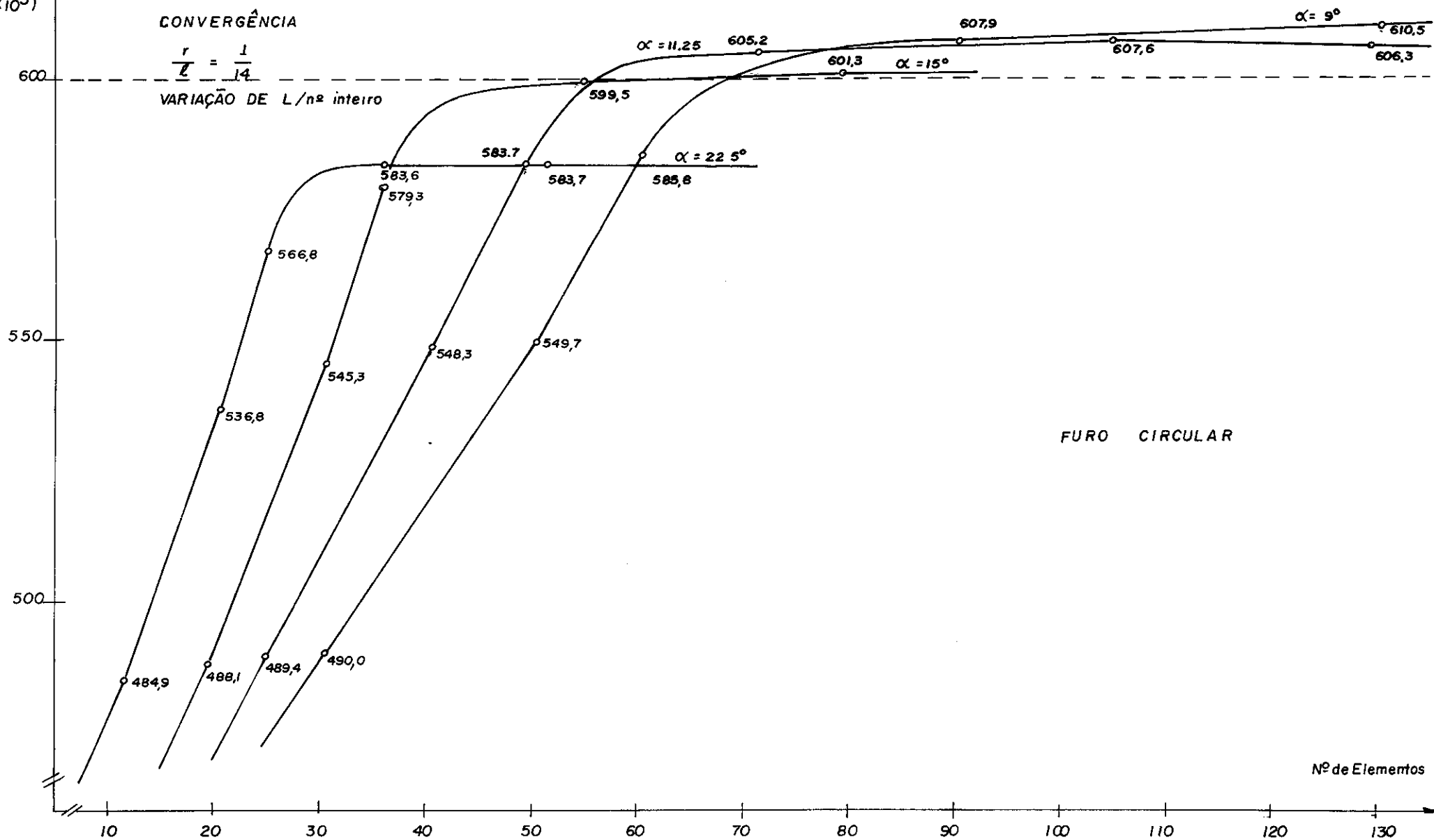
VARIAÇÃO DE L/n^2 inteiro

GRÁFICO V 3

CONVERGENCIA GLOBAL
FURO CIRCULAR. $r/l = 1/6$

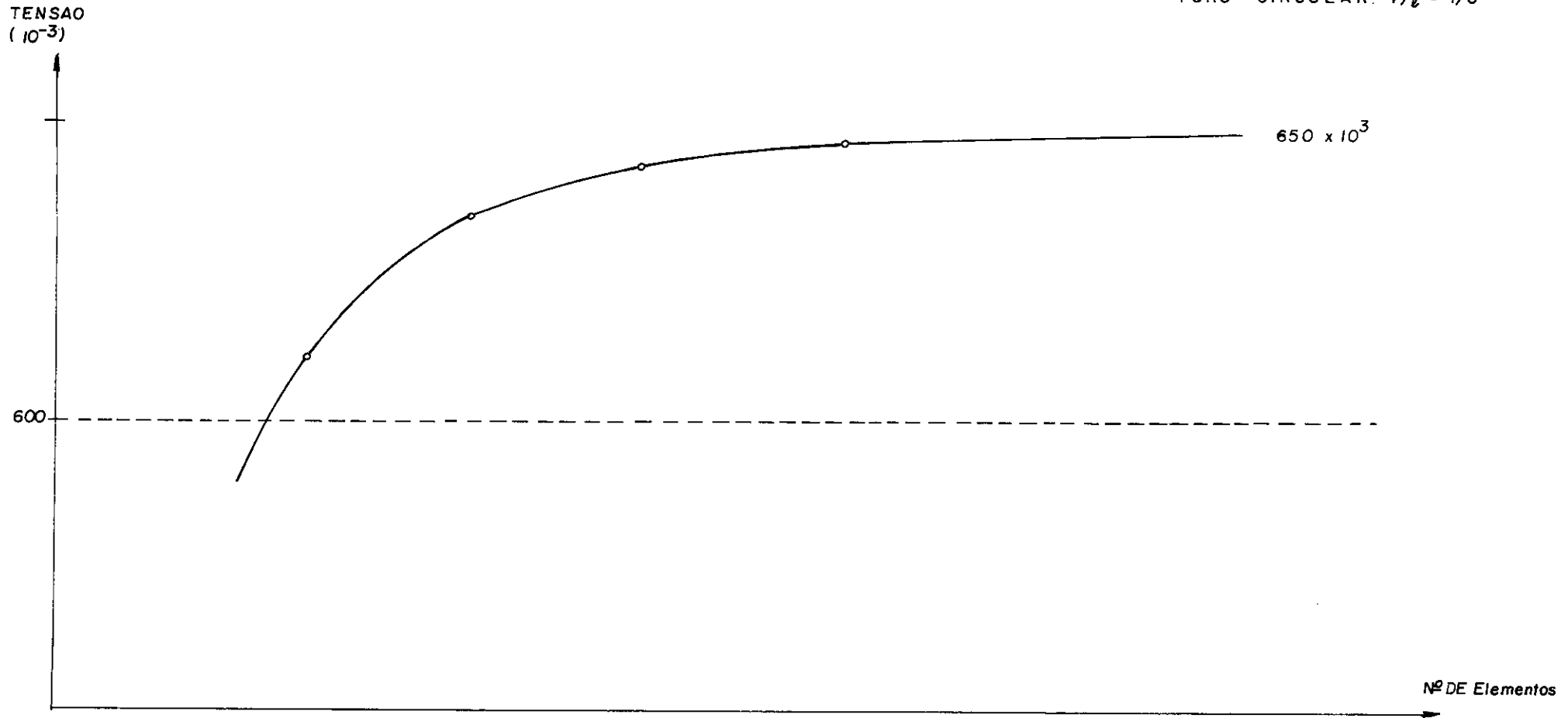


GRAFICO IV. 4

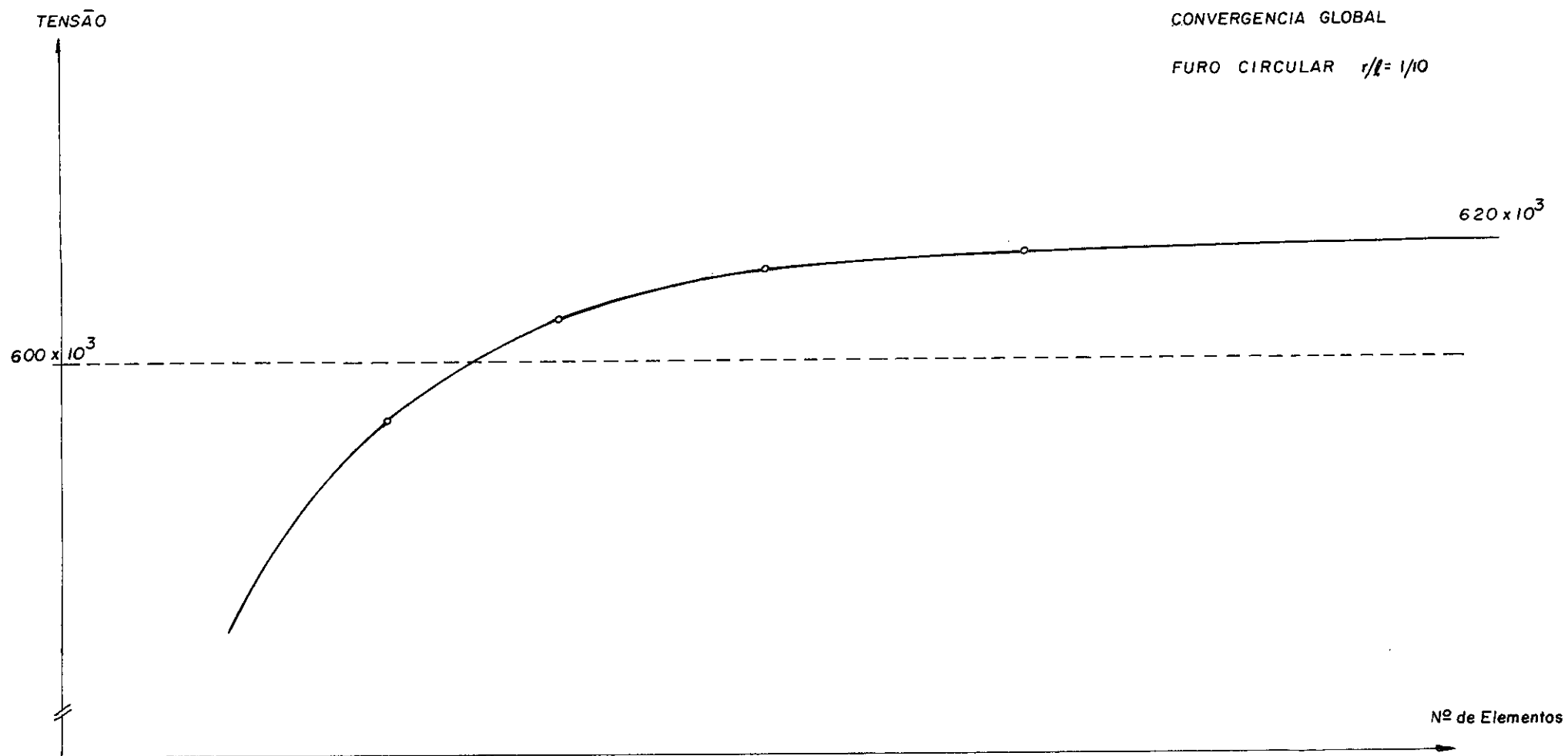


GRÁFICO V.5

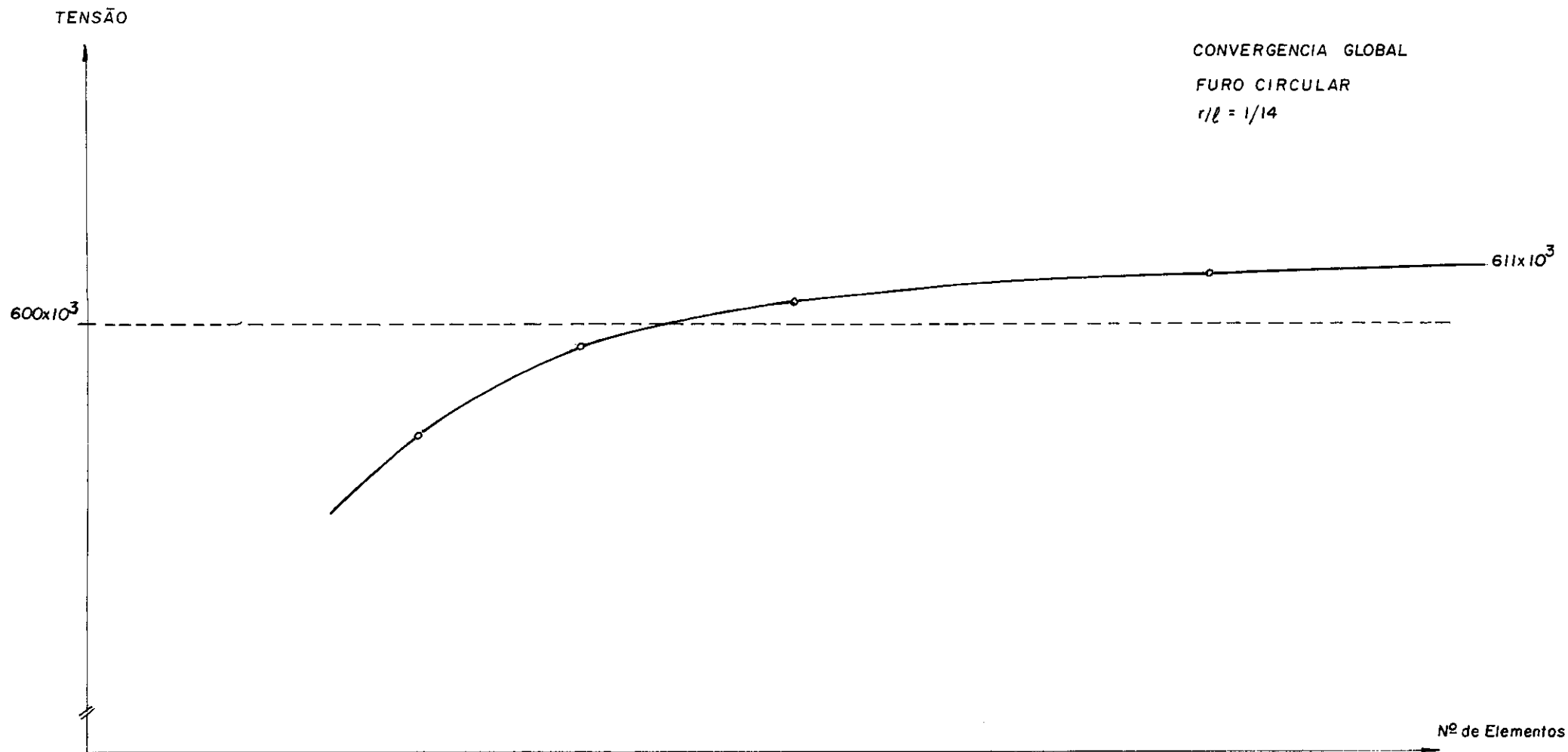


GRÁFICO V.6

r/l	MALHA UTILIZADA		RESULTADOS (Kg/cm ²)
	α	a	
1/4	9 ⁰	1/50	712 x 10 ³
1/8	9 ⁰	1/50	629 x 10 ³
1/12	9 ⁰	1/100	614 x 10 ³
1/16	9 ⁰	1/100	609 x 10 ³
1/20	9 ⁰	1/100	607 x 10 ³

RESULTADOS PARA OUTROS VALORES DE r/l

TABELA (V.2)

De acordo com as duas Tabelas dadas neste Capítulo, pôde-se construir o gráfico (V.7), onde se vê claramente a influência da proximidade de contornos laterais e a convergência acentuada da curva para o valor de tensão

$$T = 606 \times 10^3 \text{ Kg/cm}^2 \quad (V.1)$$

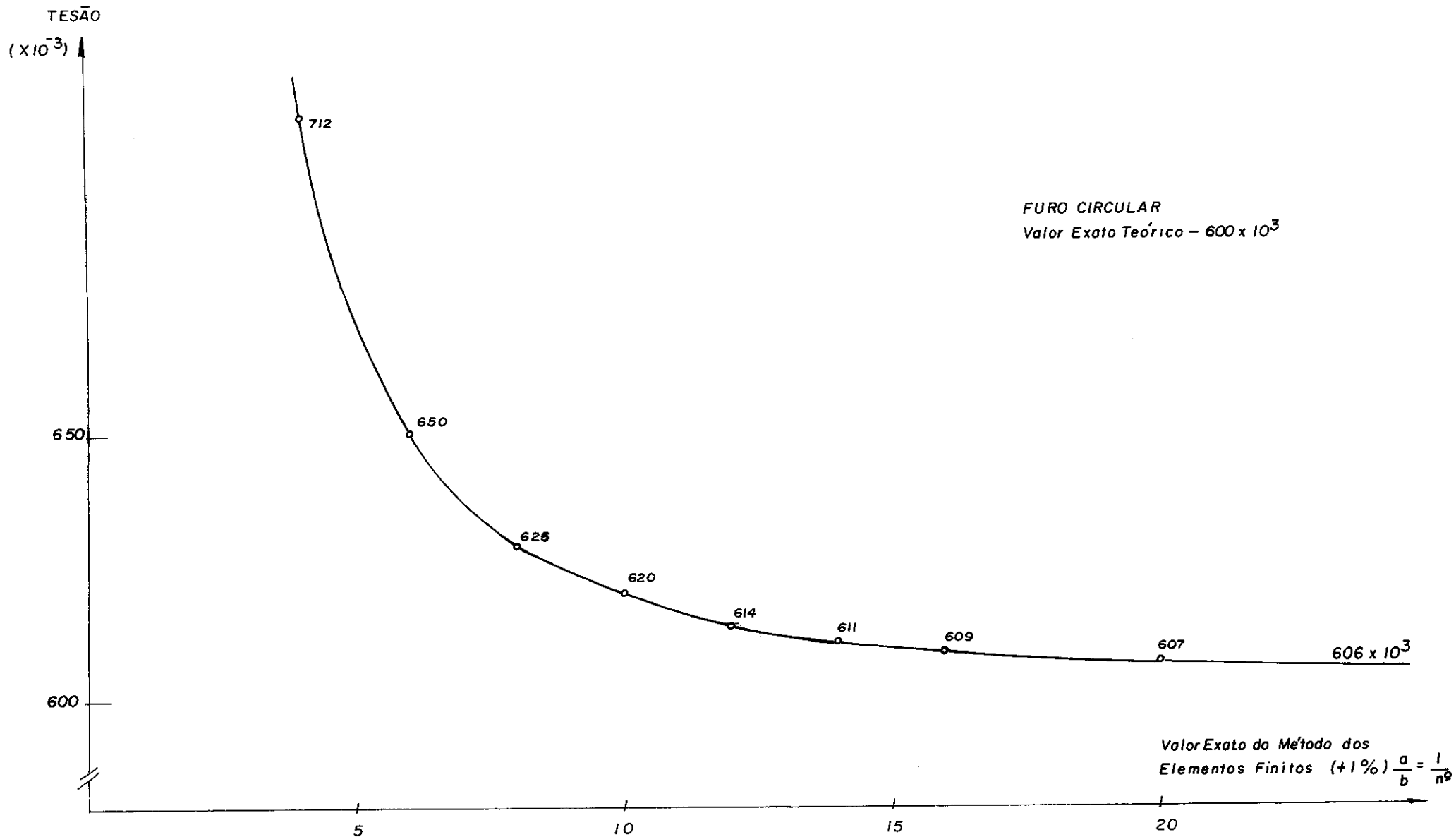


GRÁFICO V.7

que é o melhor resultado a se conseguir com este elemento do método dos elementos finitos para a chapa infinita com furo circular.

V.1.2 - Furo Elíptico

Repetiu-se para o furo elíptico, todo o desenvolvimento do furo circular a partir dos valores mostrados nas Tabelas (IV.2) a (IV.4), porém, desta feita, como foram estudadas elipses com 03 relações entre semi-eixos diferentes, o trabalho foi repetido 03 vezes. Resumiu-se o que foi feito na Tabela (V.3), onde os símbolos têm o significado da Figura (IV.4).

a/b	a/l	CONVERGÊNCIAS	
		GRÁFICOS	VALOR (Kg/cm ²)
2/3	1/6	(V.8)	522 x 10 ³
	1/10	(V.9)	490 x 10 ³
	1/16	(V.10)	481 x 10 ³
1/2	1/6	(V.11)	454 x 10 ³
	1/10	(V.12)	429 x 10 ³
	1/16	(V.13)	420 x 10 ³
1/3	1/6	(V.14)	401 x 10 ³
	1/10	(V.15)	359 x 10 ³
	1/16	(V.16)	348 x 10 ³

RESUMO DO FURO ELÍPTICO
TABELA (V.3)

A partir da última coluna da Tabela acima, a exemplo do feito para o furo circular, construiu-se a curva de influência dos contornos laterais, convergente para o resultado correspondente à chapa infinita como se verifica nos Gráficos (V.17) a (V.19), logo, para a chapa infinita com furo elíptico, os valores conseguidos com a utilização do método dos elementos finitos são:

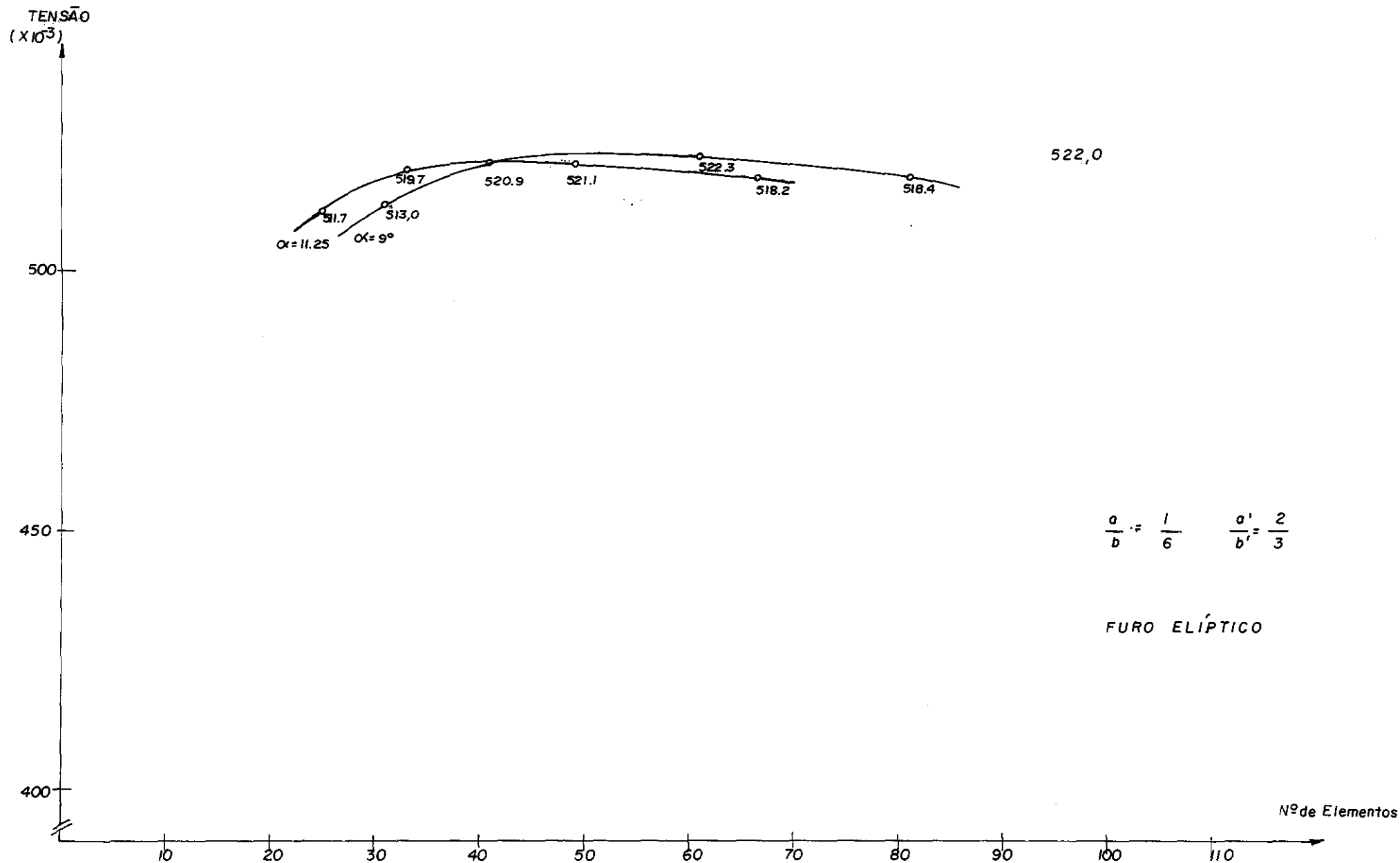


GRÁFICO V-8

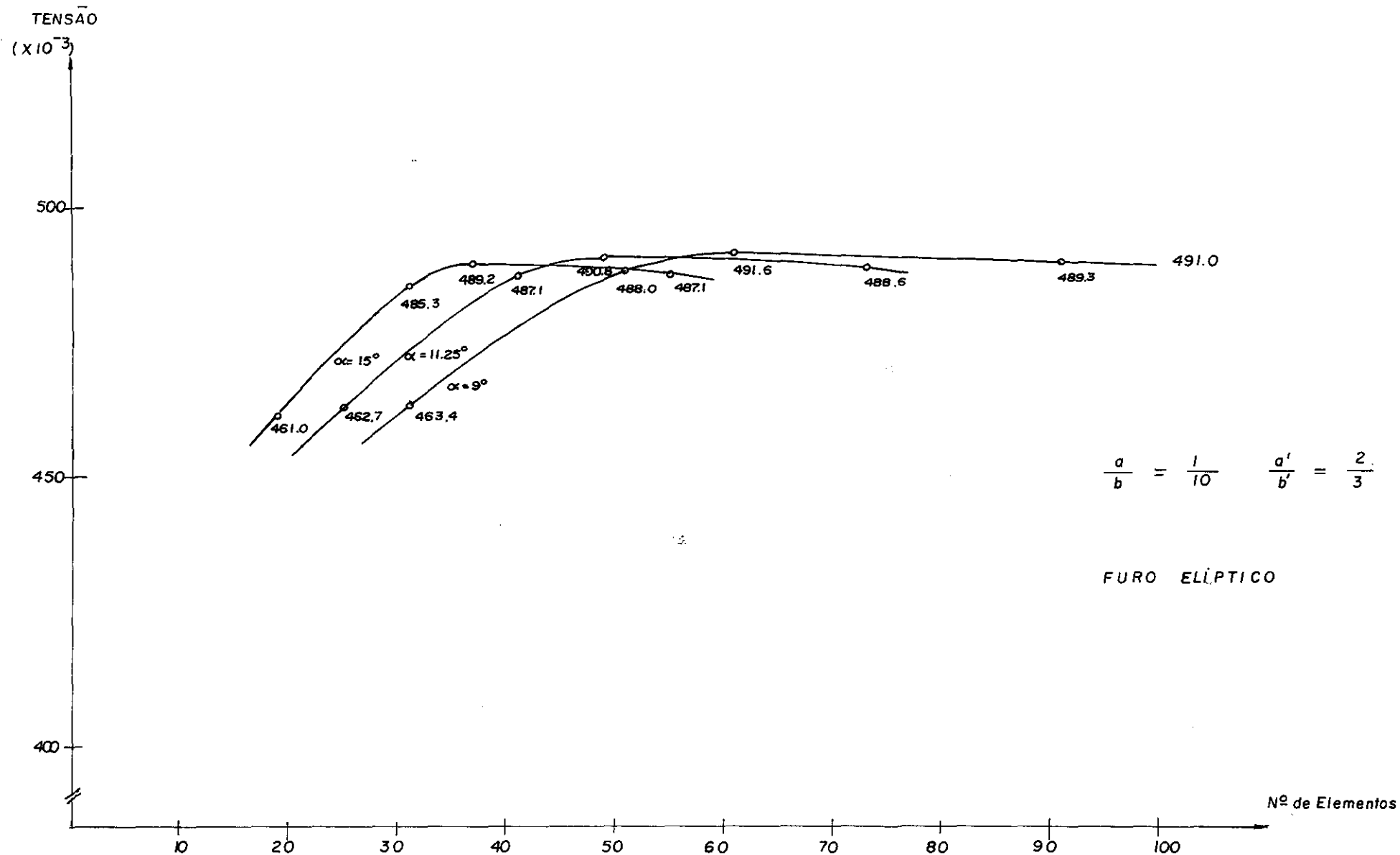


GRÁFICO V.9

TENSÃO
($\times 10^3$)

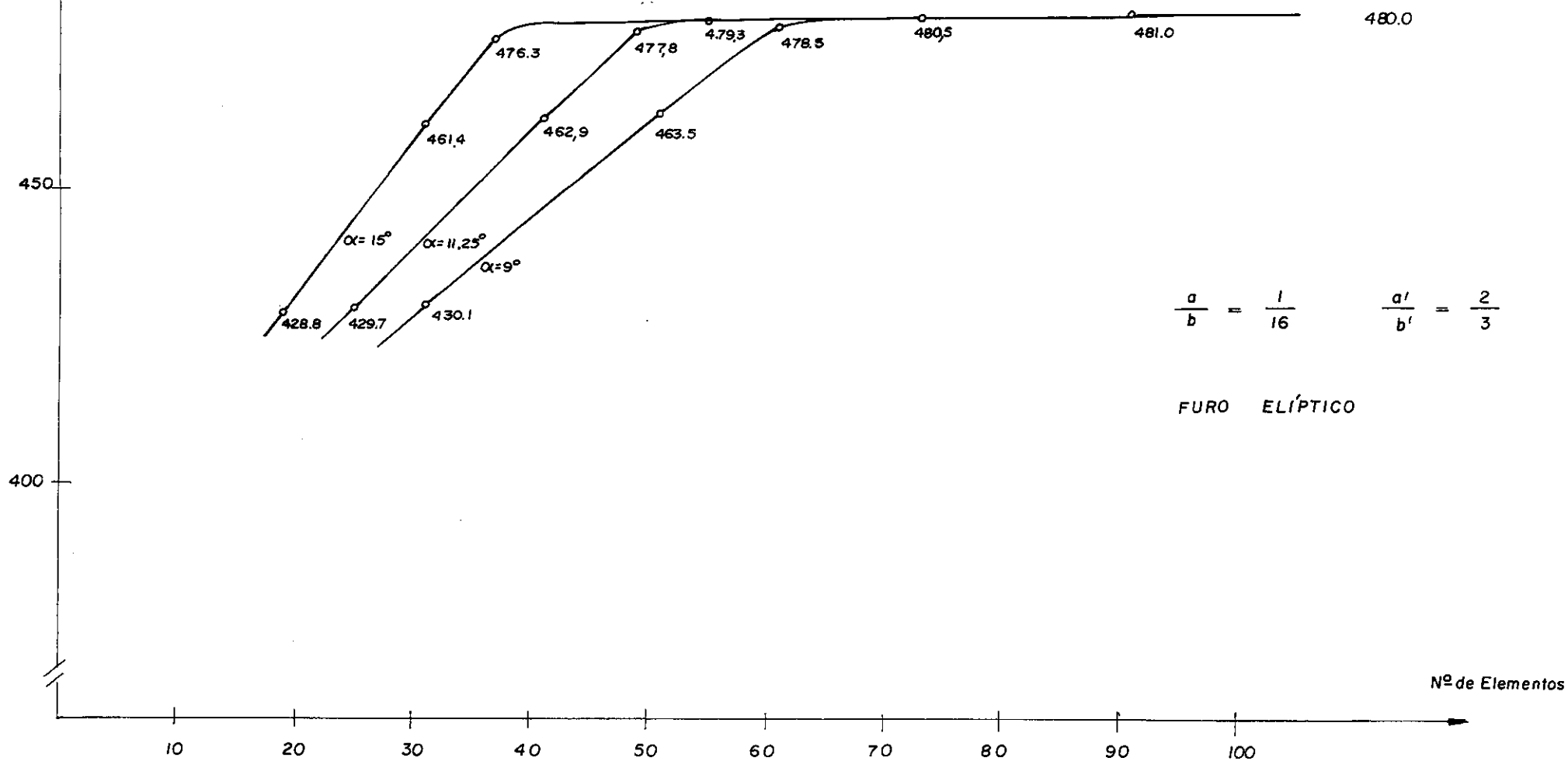


GRÁFICO V-10

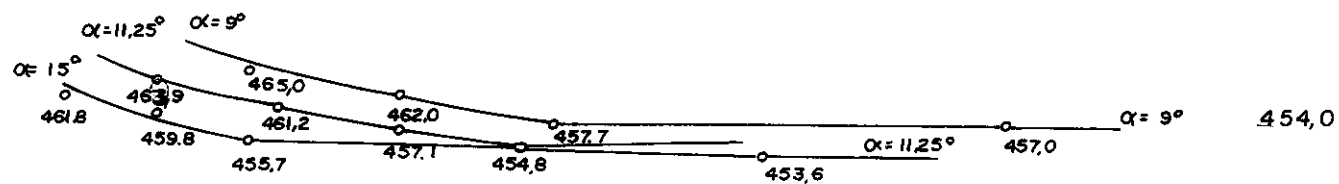
TENSÃO
($\times 10^3$)

CONVERGENCIA

500

450

400



$$\frac{a}{b} = \frac{1}{6} \quad \frac{a'}{b'} = \frac{1}{2}$$

FURO ELÍPTICO

Nº de Elementos

10

20

30

40

50

60

70

80

90

100

GRÁFICO V. 11

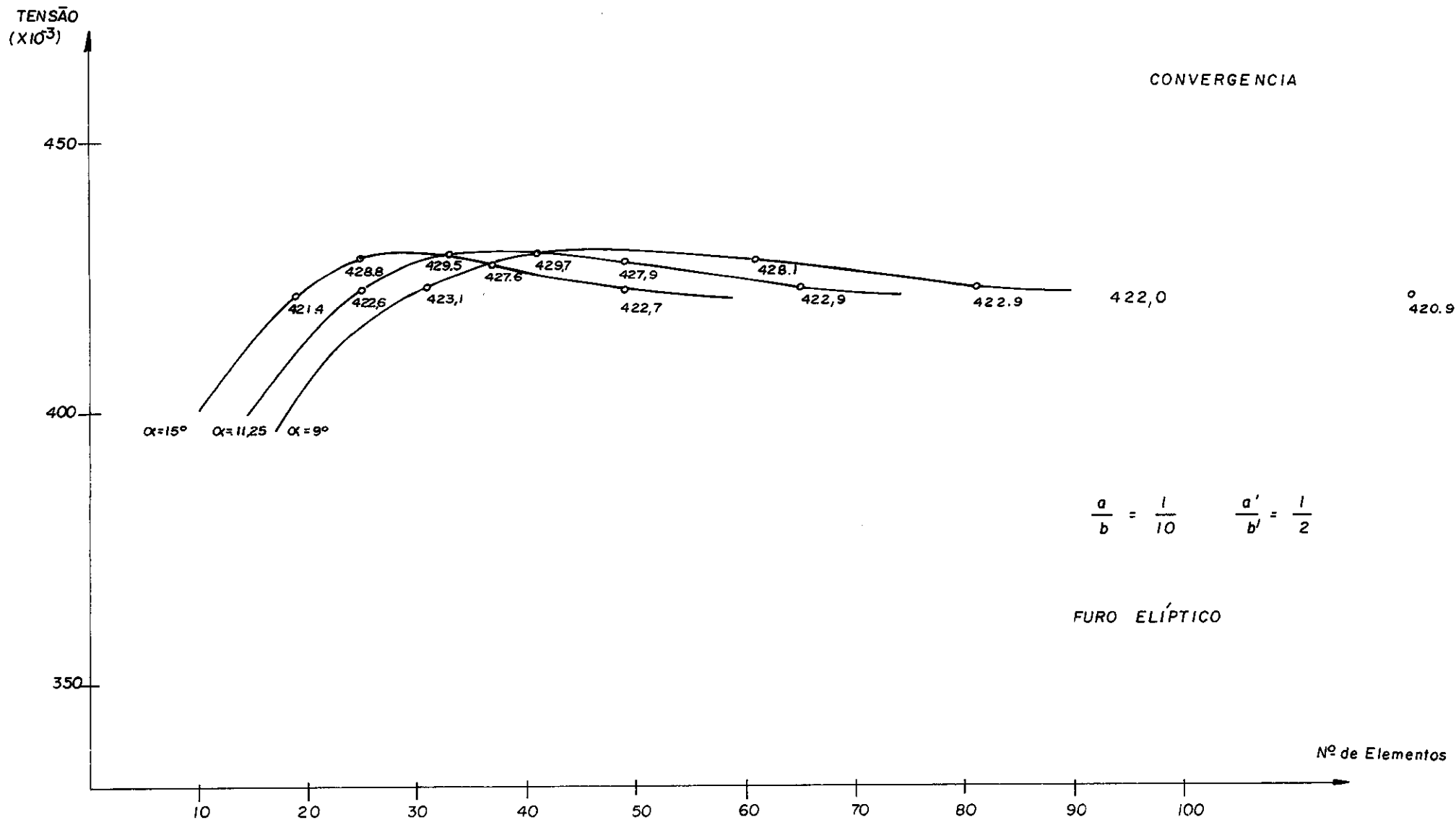


GRÁFICO V, 12

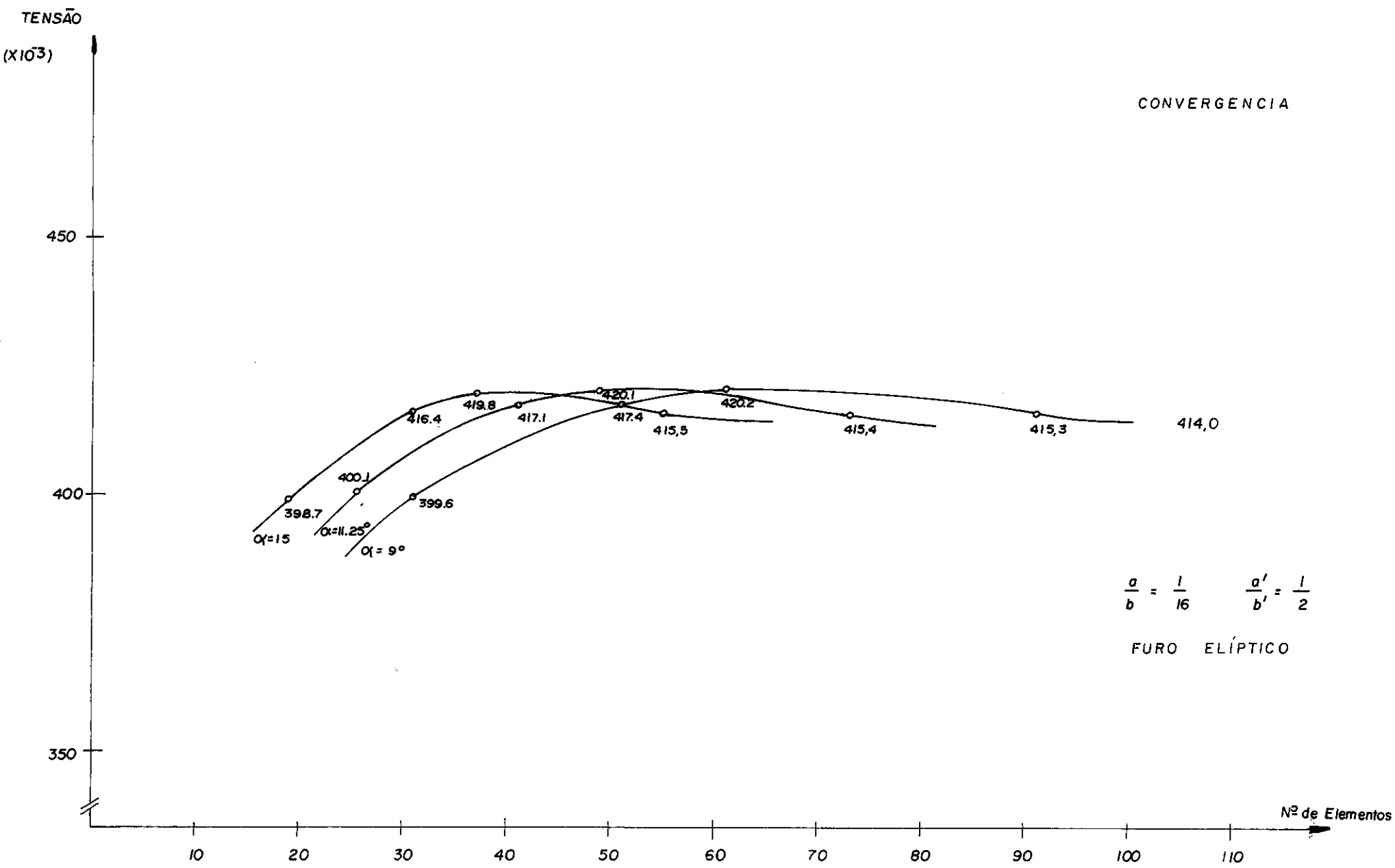


GRÁFICO V-13

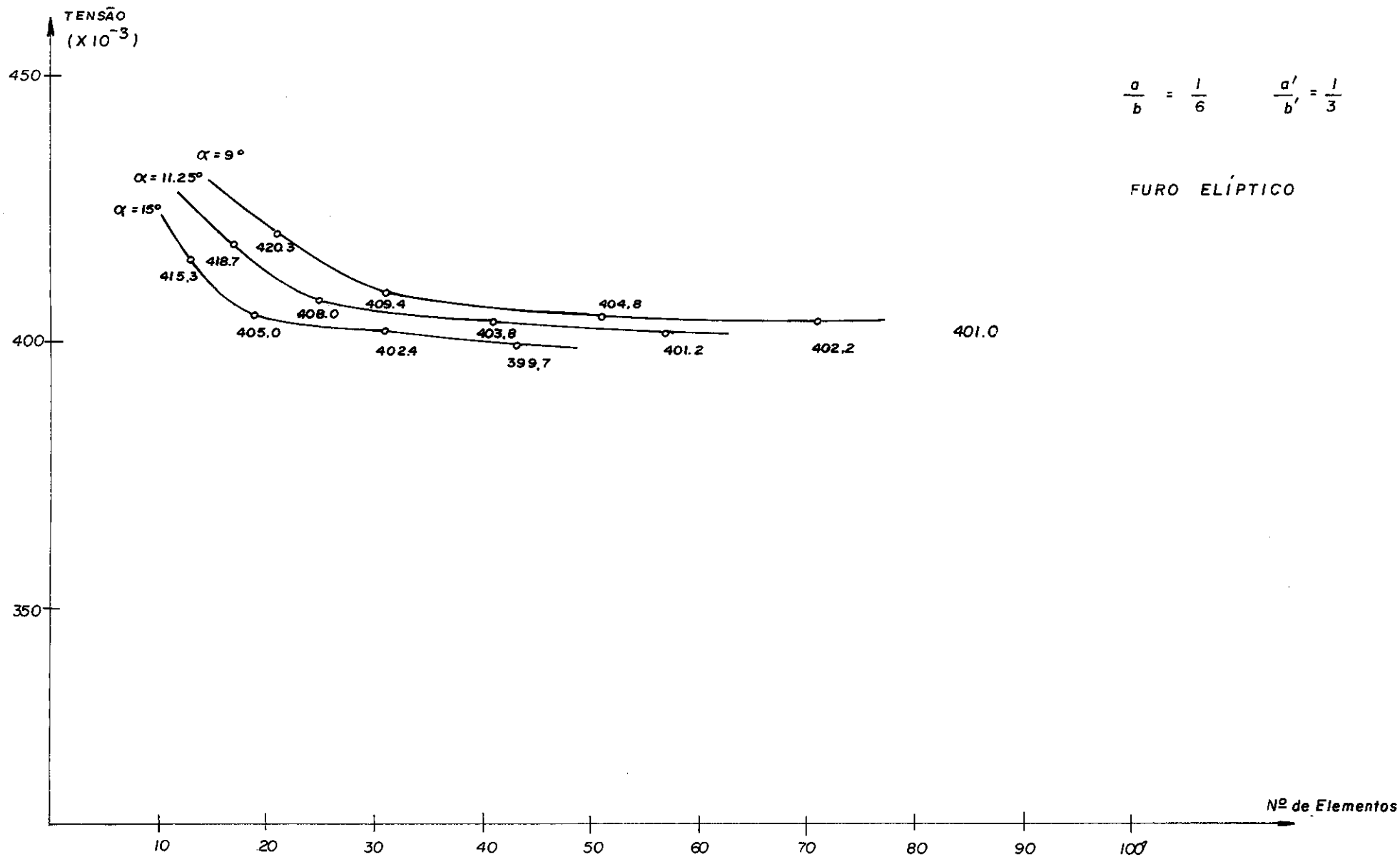


GRÁFICO V-14

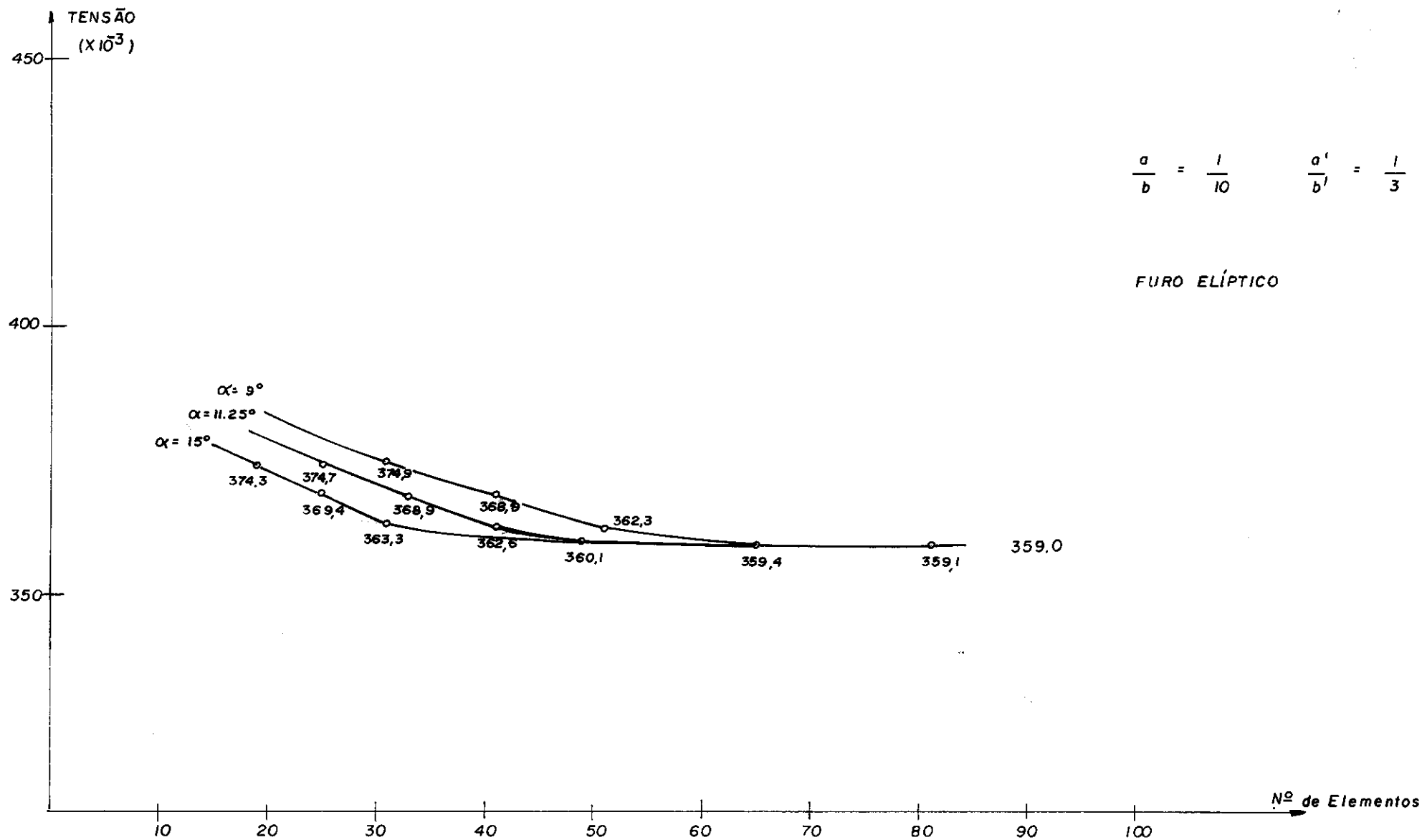


GRÁFICO V. 15

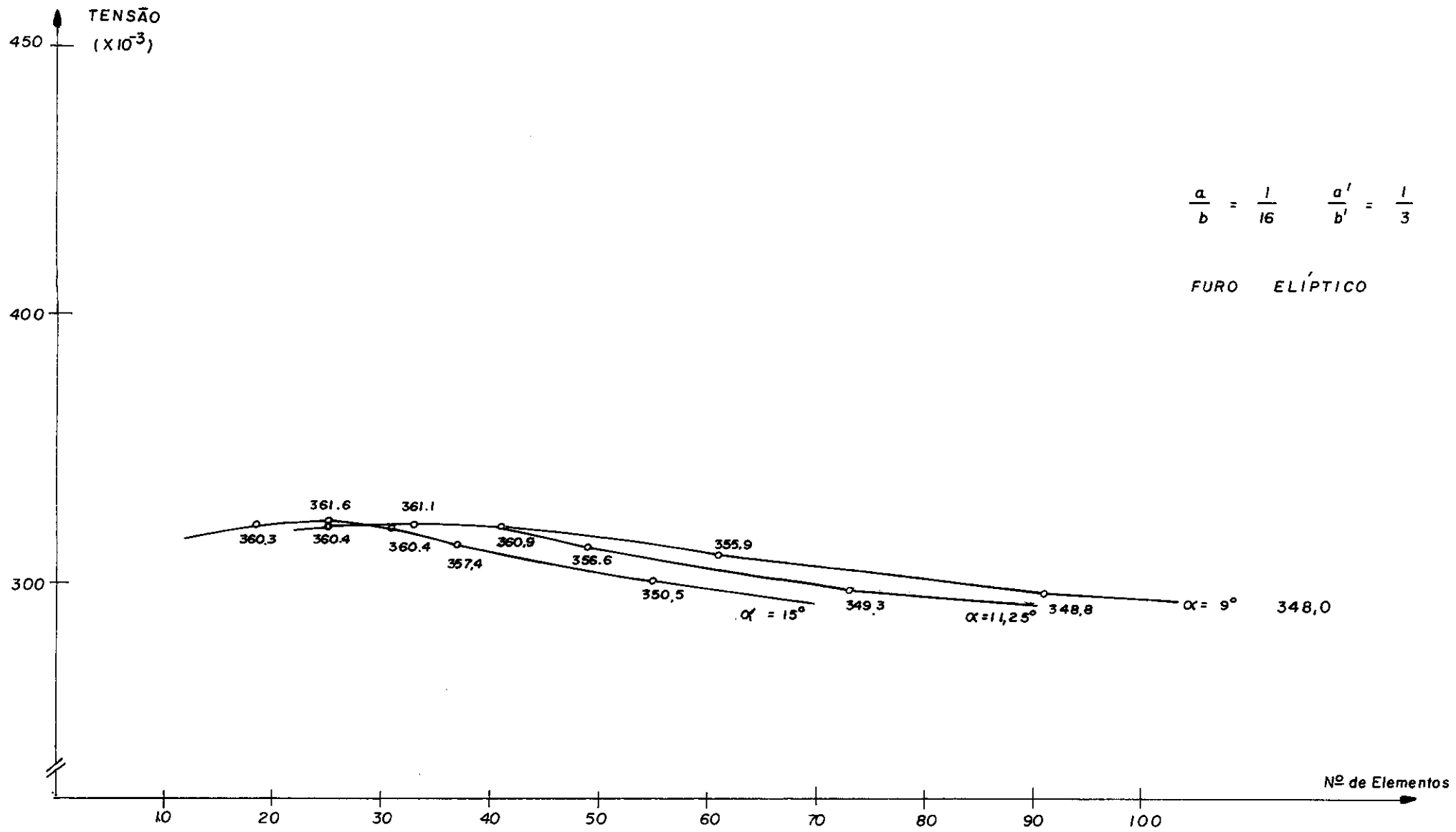


GRÁFICO V-16

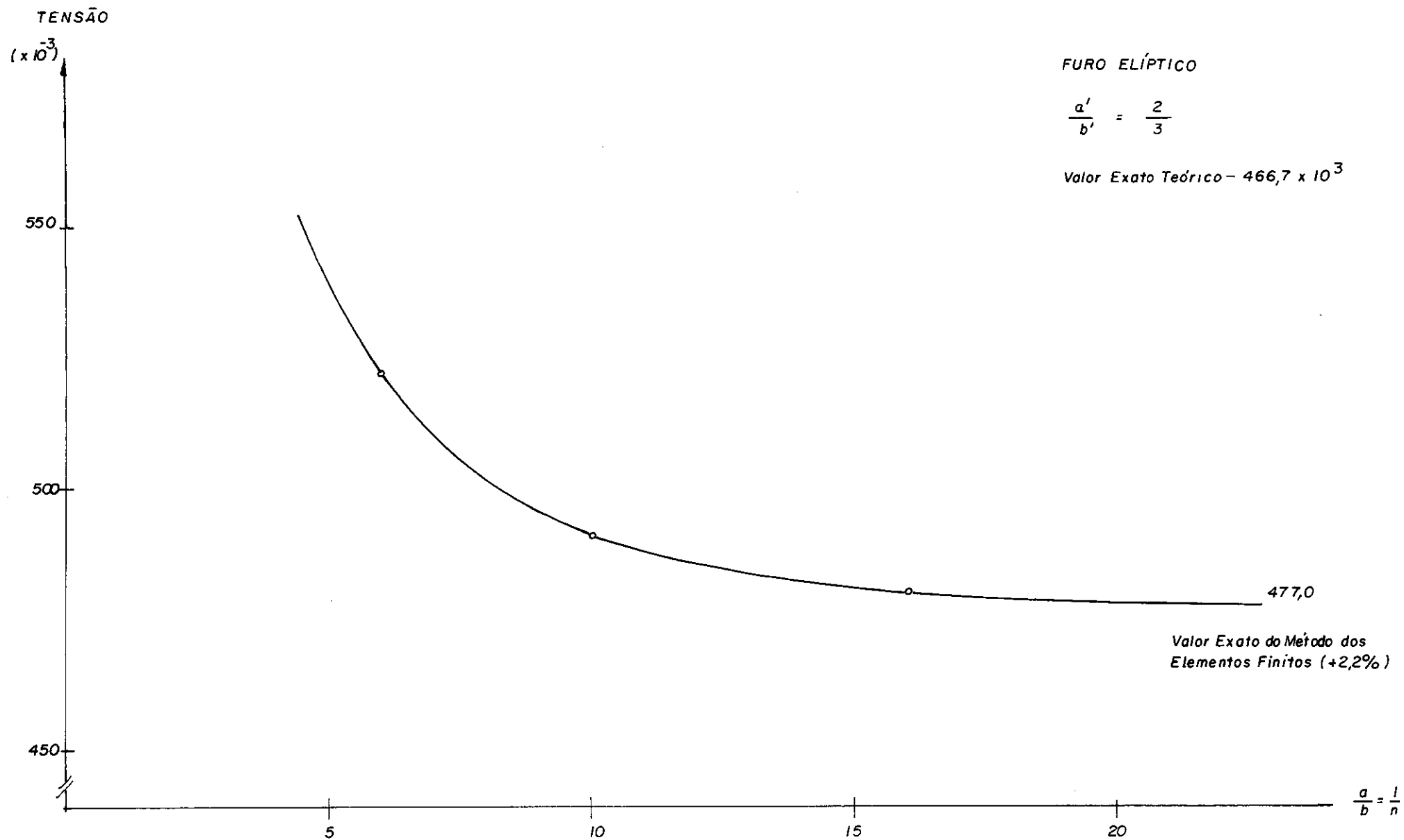


GRAFICO V.17

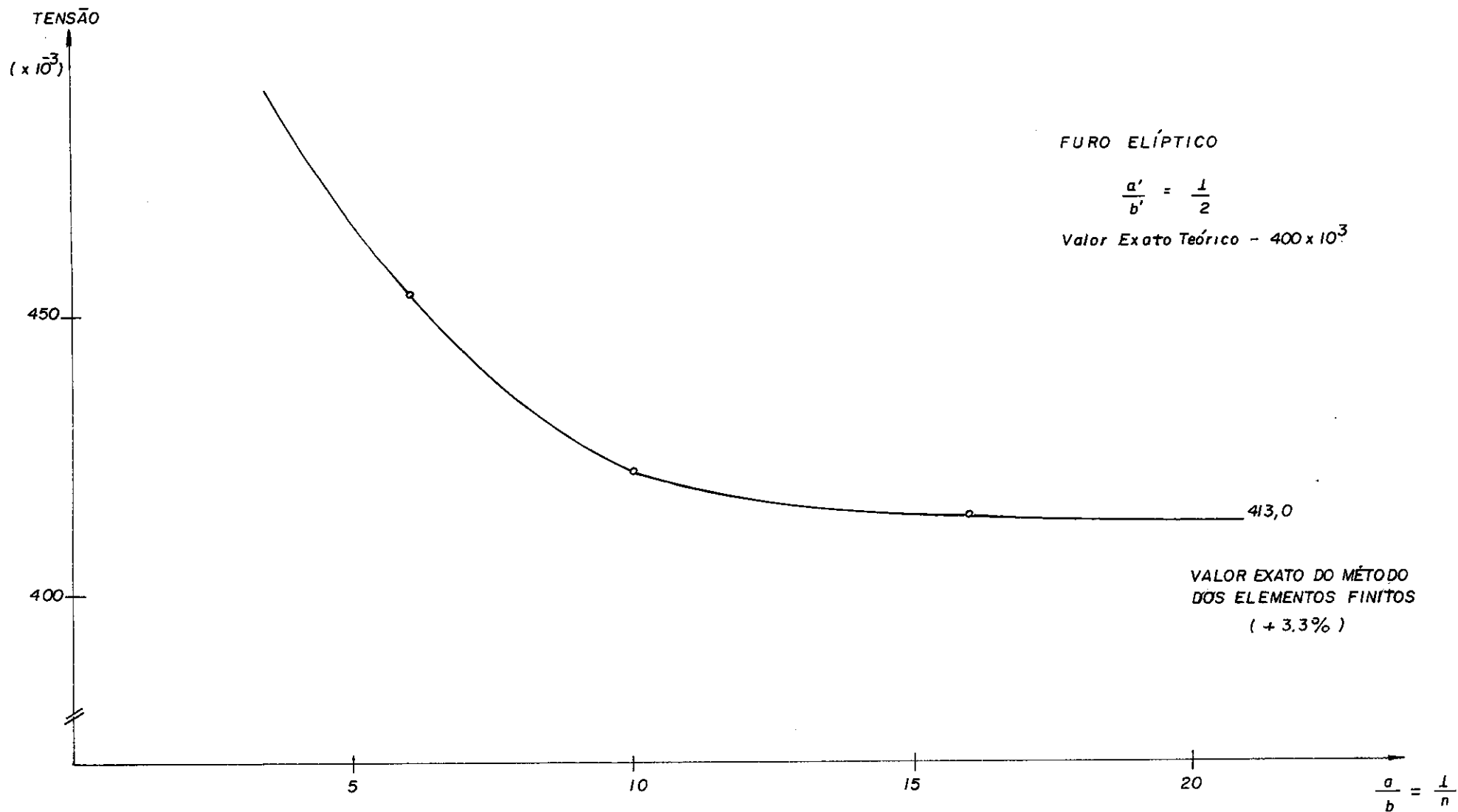


GRÁFICO V-18

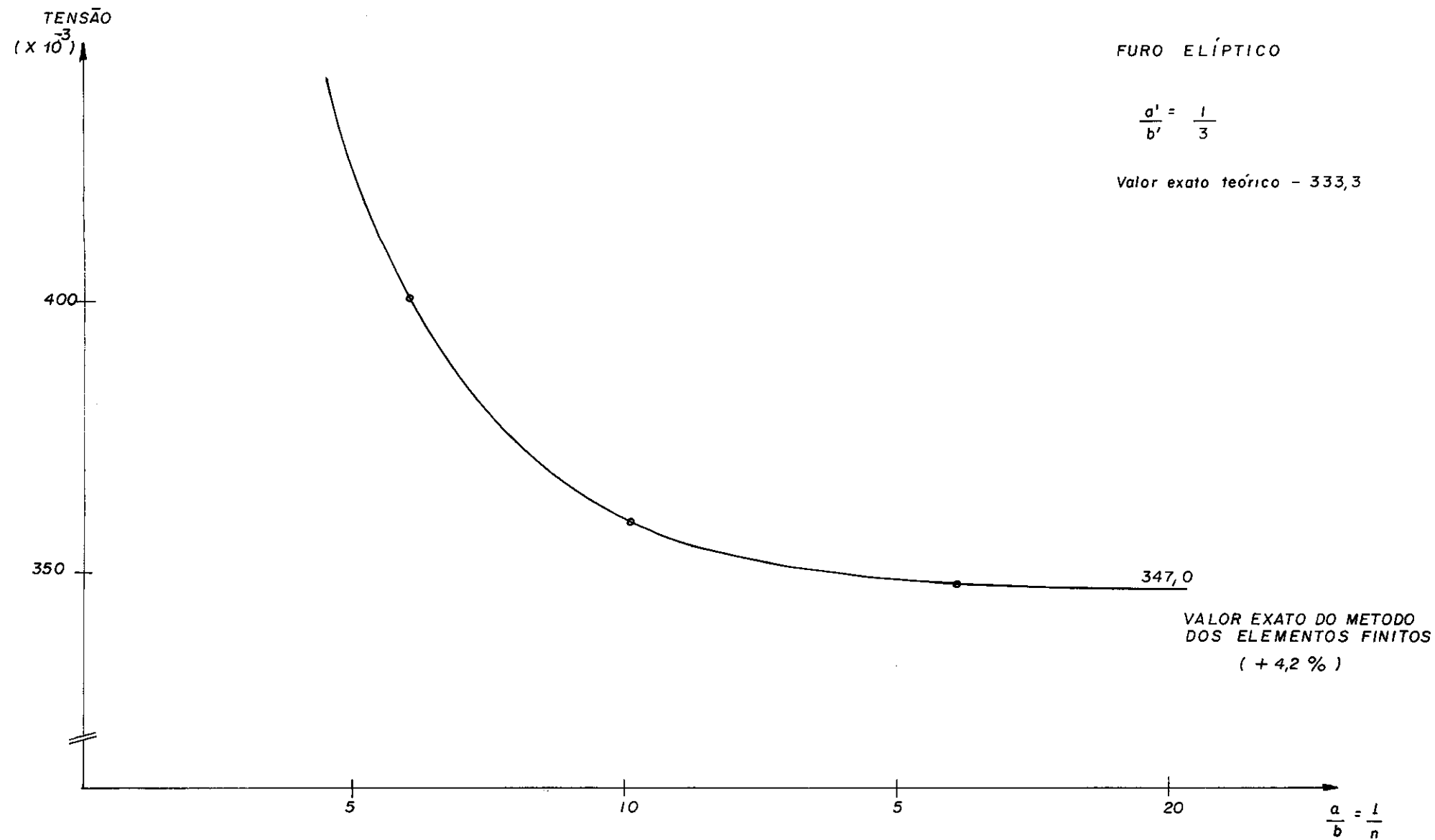


GRÁFICO V-19

* Para $a/b = 2/3$

$$T = 477 \times 10^3 \text{ Kg/cm}^2 \quad (\text{V.2})$$

* Para $a/b = 1/2$

$$T = 419 \times 10^3 \text{ Kg/cm}^2 \quad (\text{V.3})$$

* Para $a/b = 1/3$

$$T = 347 \times 10^3 \text{ Kg/cm}^2 \quad (\text{V.4})$$

V.2 - Confrontação Solução Numérica / Analítica

V.2.1 - Furo Circular

A solução exata para a chapa infinita tracionada com furo circular é a mostrada na Equação (III.14a):

$$\sigma_{\text{MAX}} = 3T$$

A tensão aplicada à chapa neste trabalho foi de $200 \times 10^3 \text{ Kg/cm}^2$, dando origem a um valor máximo de tensão na borda do furo de $600 \times 10^3 \text{ Kg/cm}^2$, sendo a chapa infinita.

O método dos elementos finitos, quando a influência dos contornos laterais já não se faz sentir, conduz ao valor de $606 \times 10^3 \text{ Kg/cm}^2$ para relações $r/l > 1/20$. O quadro-resumo abaixo mostra claramente a influência de tais contornos:

VALOR EXATO ANALÍTICO CHAPA INFINITA (Kg/cm^2)	r/l	RESULTADO NUMÉRICO (Kg/cm^2)
600×10^3	1/4	712×10^3
	1/6	650×10^3
	1/8	629×10^3
	1/10	620×10^3
	1/12	614×10^3
	1/14	611×10^3
	1/16	609×10^3
	1/20	607×10^3
	<1/20	606×10^3

TABELA (V.4)

V.2.2 - Furo Elíptico

A máxima tensão no furo elíptico de acordo com o de

envolvimento analítico aqui apresentado, vem dada pela expressão (III.26):

$$\sigma_{MAX} = T (1 + 2 b/a)$$

Foram estudadas elipses com relações diferentes entre seus semi eixos. No Quadro abaixo, apresentam-se os resultados analítico e numérico:

a/b	VALOR EXATO ANALÍTICO CHAPA INFINITA (Kg/cm ²)	a/l	RESULTADO NUMÉRICO (Kg/cm ²)
2/3	467 x 10 ³	1/6 1/10 1/16 <1/20	522 x 10 ³ 491 x 10 ³ 480 x 10 ³ 477 x 10 ³
1/2	400 x 10 ³	1/6 1/10 1/16 <1/20	454 x 10 ³ 422 x 10 ³ 414 x 10 ³ 413 x 10 ³
1/3	333 x 10 ³	1/6 1/10 1/16 <1/20	401 x 10 ³ 359 x 10 ³ 348 x 10 ³ 347 x 10 ³

TABELA (V.5)

V.3 - Conclusões

O erro do Método dos elementos finitos pode ser medido percentualmente, entre seus valores de convergência ($r/l < 1/20$) e os valores teóricos exatos, dados nas Tabelas (V.4) e (V.5).

		ERRO PERCENTUAL
FURO CIRCULAR		1 %
FURO ELIPTICO	a/b=2/3	2,2%
	a/b=1/2	3,3%
	a/b=1/3	4,2%

TABELA (V.6)

Pela simples análise do Quadro acima pode-se concluir que os resultados do método dos elementos finitos para análise de problemas de concentração de tensões em chapas traçadas é bom, conduzindo a, em média, 3% de variação nas tensões. Verifica-se ainda que a precisão de seu resultado diminui quanto menos circular for o furo, chegando-se a erros, neste trabalho, de até 4,2%, o que ainda é bastante razoável para

utilização em projetos.

Um outro resultado de interesse a que se pôde chegar é quanto a influência dos contornos laterais na máxima tensão da placa. Avaliando os Gráficos (V.7) e (V.17) a (V.19), verifica-se que para valores de r/l menores que $1/20$ o contorno já não influi nas tensões ao redor do furo. Para valores maiores de r/l tal influência se faz notar. Na Tabela abaixo, mostra-se o erro percentual tomado como referência o valor de convergência do método para $r/l < 1/20$, relativo à chapa infinita, e o fator de concentração de tensões, este último em relação à tensão na chapa sem furo, tomando-se como base, para o furo circular, o valor 3,00 e para os furos elípticos, também os valores teóricos exatos da chapa infinita, sendo obtidos tais fatores por regra de três.

Por exemplo, para o furo circular e $r/l = 1/6$

$$606 - 3$$

$$650 - x \quad \therefore \quad x = 3,22$$

r/l	DIFERENÇA %		FATOR DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES
	FURO	CIRCULAR	
1/4	17,5		3,52
1/6	7,26		3,22
1/8	3,80		3,11
1/10	2,31		3,07
1/12	1,32		3,04
1/14	0,83		3,02
1/16	0,50		3,01
1/20	0,17		3,00
<1/20	0,00		3,00
FURO ELIPTICO - a/b = 2/3			
1/6	9,43		2,56
1/10	2,94		2,40
1/16	0,63		2,35
<1/20	0,00		2,34
FURO ELIPTICO - a/b = 1/2			
1/6	9,93		2,20
1/10	2,18		2,04
1/16	0,24		2,00
<1/20	0,00		2,00
FURO ELIPTICO - a/b = 1/3			
1/6	15,6		1,93
1/10	3,46		1,73
1/16	0,29		1,67
<1/20	0,00		1,67

INFLUÊNCIA DA PROXIMIDADE DOS CONTORNOS LATERAIS

TABELA (V.6)

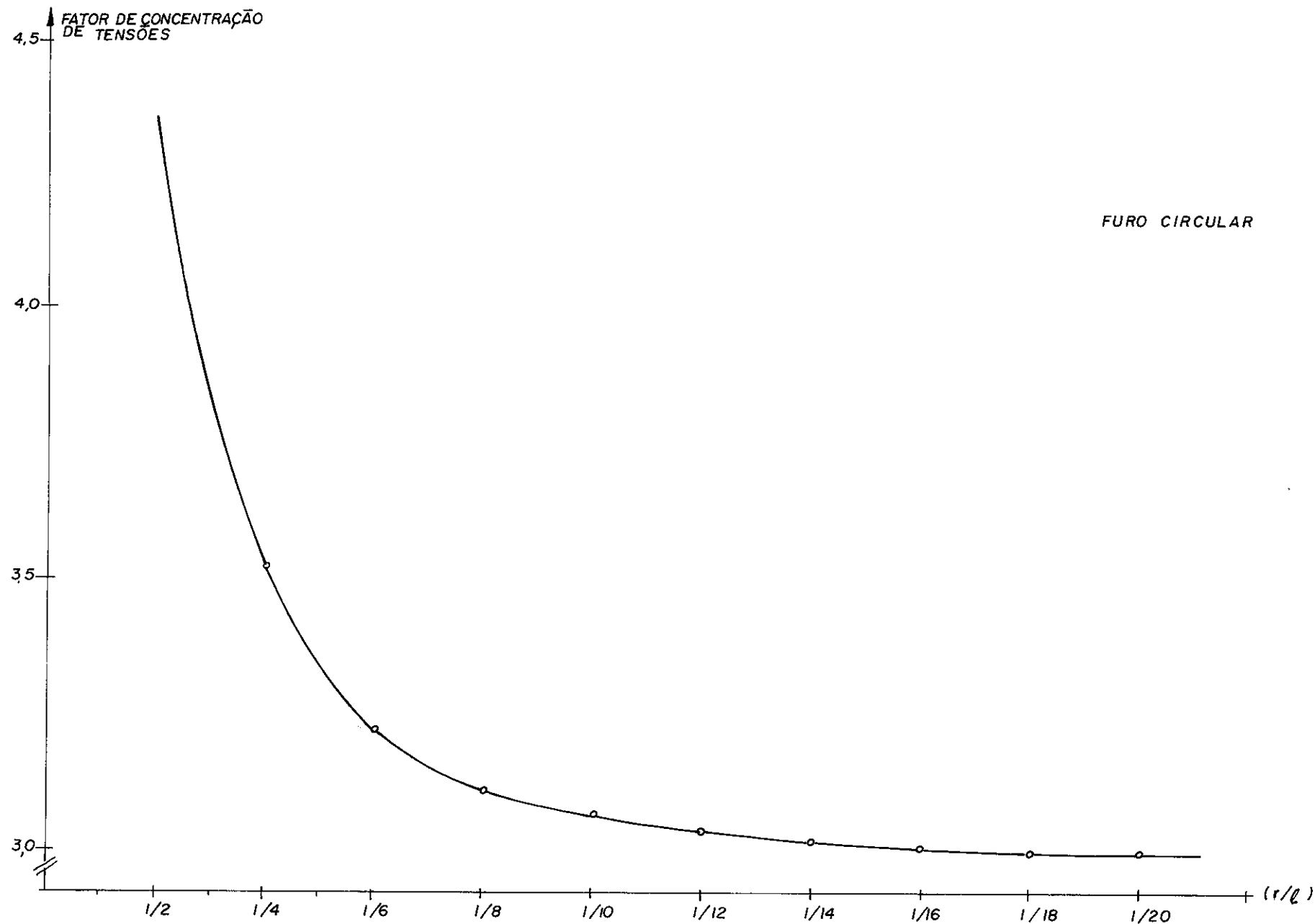


GRÁFICO V-20

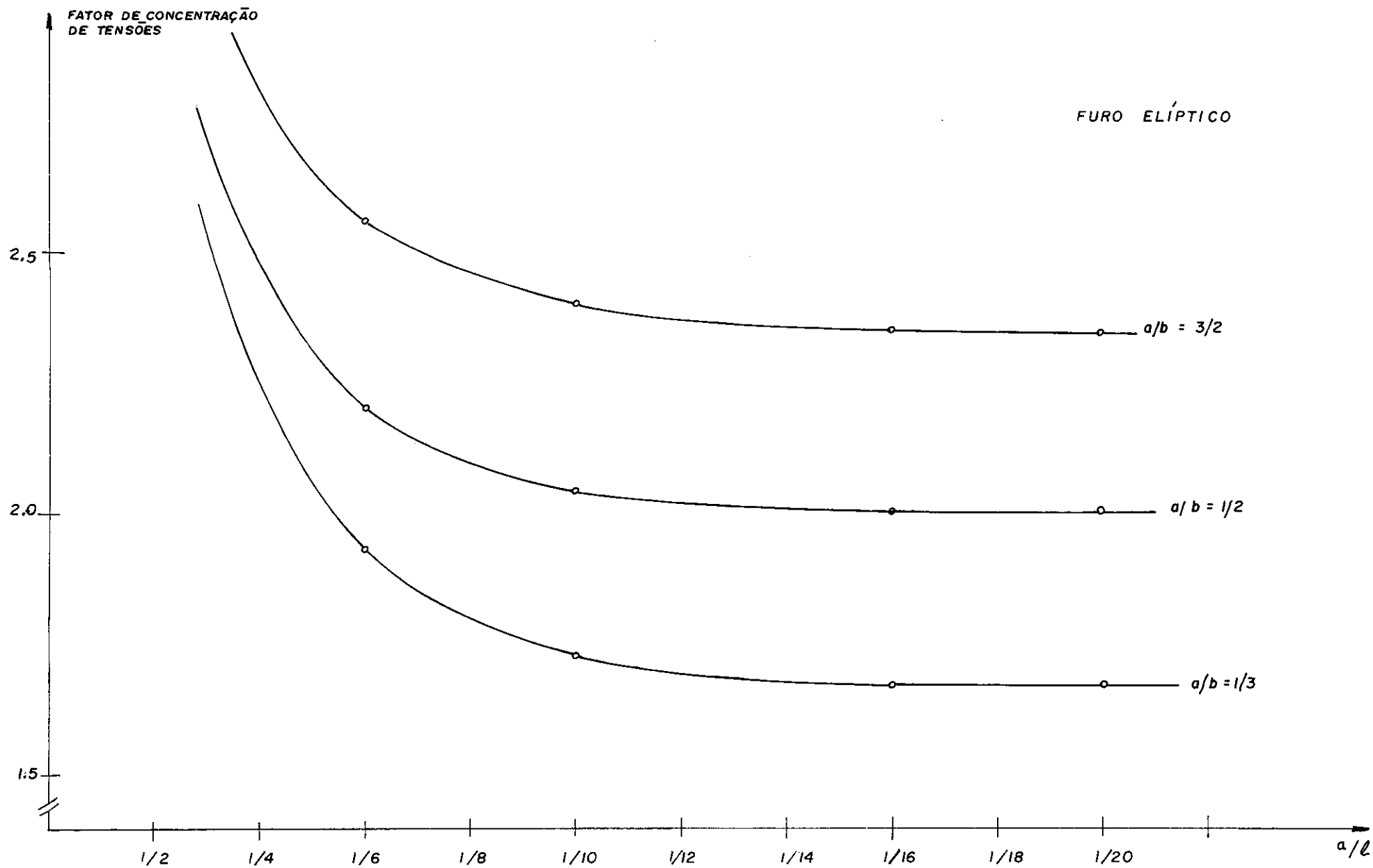


GRÁFICO V-21

Da Tabela anterior pode-se escolher o que será "infinito", em função da diferença percentual aceitável. Se for admissível uma variação de 5%, a partir de r/l igual a $1/8$ já pode-se considerar a chapa infinita, valor que, abstraindo-se de análise mais aprofundada, fica como recomendação.

Além disso, na última coluna da Tabela anterior há uma mostra quantitativa da concentração de tensão ao se aproximarem os contornos laterais do furo, que pode ser utilizado para resolução de problemas práticos, onde são pré-fixados o tamanho do furo e a largura da faixa. Os Gráficos (V.20) e (V.21) possibilitam uma melhor visualização destes resultados.

Por fim, pode-se ainda recomendar, se for preciso utilizar-se o método dos elementos finitos para solução de algum problema em particular, usar uma malha com $\alpha = 9^\circ$ conforme padrão deste trabalho (partições maiores praticamente não trariam ganhos de precisão) e variando do furo até os contornos laterais em progressão aritmética de razão $1/50$ a $1/100$ da semi largura da chapa.

B I B L I O G R A F I A

BIBLIOGRAFIA



AVILA, G. S. S. - Funções de uma Variável Complexa. Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1974.

CARRIER, G. F.; KROOK, M.; PEARSON, C. E. - Functions of a Complex Variable. McGraw-Hill, New York, 1966.

CHAGAS FILHO, E. - Um Enfoque Integrado para a Implementação de Elementos Isoparamétricos. UFRGS, Porto Alegre, Tese M. Sc., 1974.

CHURCHILL, R. V. - Complex Variables and Applications. McGraw-Hill, New York, 1960.

COOK, R. D. - Concepts and Applications of Finite Element Analysis. John Wiley and Sons, Inc., London, 1974.

DESAI, G. S.; ABEL J. F. - Introduction to the Finite Element Method. Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1972.

FERRANTE, A. J. - Linguagem Lebre I-A-Manual do Usuário. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1980.

FERRANTE, A. J. - Notas de Aula. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1980.

GODFREY, D. E. R. - Theoretical Elasticity and Plasticity for Engineers.

HOWLAND, R. C. J. - On the Stresses in the Neighbourhood of a Circular Hole in a Strip Under Tension. Phil. Trans. Roy. Soc., Vol. 229, London, 1930.

LITTLE, R. M. - Elasticity. Prentice Hall, Inc., London, 1973.

MILNE, L. M. - Plane Elastic Systems. Springer-Verlag, Berlin, 1960.

MUSKHELISHVILI, N. I. - Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity. Noordhoff International Publishing, Netherlands, 1975.

SAVIN, G. N. - Stress Concentration Around Holes. Pergamon Press, London, 1961.

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. - Teoria da Elasticidade. Guanabara Dois, Rio de Janeiro, 1980.

ZIENKIEWICK, O. C.; The Finite Element Method. McGraw-Hill, New York, 1967.